Gymnasiematematikfagets fagidentitet

Jensen, Kasper Bjering Søby

Publication date:
2016

Document Version
Også kaldet Forlagets PDF

Citation for published version (APA):
Jensen, K. B. S. (2016). *Gymnasiematematikfagets fagidentitet*. Roskilde Universitet.

Gymnasiematematikfagets Fagidentitet

Ph.D.-afhandling

Kasper Bjering Søby Jensen

2016

Vejledere: Tinne Hoff Kjeldsen

Mogens Niss

IMFUFA

Institut for Naturvidenskab og Miljø

Roskilde Universitet

Denne afhandling kan hentes elektronisk som PDF-fil på web-adressen:

http://www.bjering.dk/phd/AFHANDLING.pdf

Forord

Nærværende afhandling har haft et noget længere tilblivelsesforløb end planagt. Arbejdet startede da jeg i august 2009 blev ansat som ph.d-studerende i matematikkens didaktik ved forskningsgruppen IMFUFA på institut for Natur, Systemer og Modeller (NSM), Roskilde Universitet (RUC).

I efteråret 2012 stod det klart at afhandlingen ikke ville kunne færdiggøres til tiden og jeg vendte derfor tilbage til Roskilde Katedralskole som underviser i matematik og fysik, mens jeg sideløbende arbejdede videre med afhandlingen. I lange perioder har projektet ligget helt stille, mens det i andre perioder har taget store skridt fremad på meget kort tid.

Færdiggørelsen er muliggjort af at jeg i ca. 4 måneder i foråret og sommeren 2016 har holdt forældreorlov med min tredje søn. Det var hårdt, men muliggjorde at jeg fik lukket og afsluttet de allerede skrevne kapitler samt skrevet det sidste og afsluttende kapitel.

Afhandlingen bærer nok præg af at være skrevet i adskilte tidsperioder over en ca. 4 år lang periode, ligesom dele bærer præg af de vilkår den er færdiggjort under. Sådan blev rammerne for afhandlingens færdiggørelse. Men som kloge mennesker har rådgivet mig med, så er en 80% færdig afhandling med store ambitioner meget mindre værd end en 100% færdig afhandling med knapt så store. Derfor har jeg skåret til de steder hvor det måtte gøres og gjort de sidste ting i et nødvendigt tempo. Og derfor er det lykkedes at indlevere denne afhandling til forsvar for ph.d-graden.

Jeg skal naturligvis rette en meget stor tak til mine to vejledere Tinne Hoff Kjeldsen og Mogens Niss, for utallige fantastiske diskussioner og altid åben og kompetent vejledning. En helt særlig tak må rettes til Mogens for hans meget vedholdende insisteren på, at denne afhandling længe har været tæt på færdig. Uden denne insisteren havde jeg næppe haft kræfter til rent faktisk at lukke arbejdet.

En stor tak skal også rettes til de utroligt mange mennesker jeg igennem årene har mødt, arbejdet sammen med og ikke mindst haft et utal af frugtbare diskussioner med. Både fra IMFUFA, fra Roskilde Katedralskole og fra hele det matematik- og naturfagsdidaktiske miljø i Danmark. Det vil være umuligt at lave en tilnærmelsesvis udtømmende liste over jer alle sammen. Men stor tak!

Med indleveringen af denne afhandling afslutter jeg også ca. 15 års næsten uafbrudt formel tilknytning til Roskilde Universitet, hvor jeg begyndte som studerende på den naturvidenskabelige basisuddannelse i september 2001. Det har været en helt utrolig rejse, som for mig viser at det naturvidenskabelige og matematiske miljø på RUC bidrager med noget unikt og uundværligt til den naturvidenskabelige og matematiske forskning i Danmark og resten af verden.

Ishøj d. 24. juni 2016

Kasper Bjering Søby Jensen

Resumé

Denne afhandling handler om matematiks identitet som fag i den danske almene gymnasieskole. Afhandlingen tager sit afsæt i en formodning om, at netop forskellige forståelser af hvad fagets identitet er, er en væsentlig kilde til konflikter mellem fagets aktører og til friktion på feltet som helhed overfor forsøg på at gennemføre små og store forandringer i fagets indhold.

Afhandlingen konstruerer derfor begrebet *fagidentitet*, som dækkende over et *helhedssyn på hvilke objekter og problemstillinger der kan behandles selvstændigt i faget*. Fagidentiteter for matematik er således en mangfoldig størrelse, som eksisterer i mange forskellige varianter.

For at kunne skelne forskellige fagidentiteter fra hinanden, opstiller afhandlingen et nuanceret begrebsapparat. En fagidentitet opfattes overordnet som udspændt af tre uafhængige dimensioner. En *teori*-dimension, en *anvendelses*-dimension og en *meta*-dimension. For hver dimension formuleres et sæt af tyngdepunkter.

For teoridimensionen opstilles a) *færdighedstræning*, b) *problemløsning*, c) *ræsonneret retfærdiggørelse*, d) *teoriforståelse*, e) *begrebskendskab* og f) *konventionskendskab*. For anvendelsesdimensionen opstilles: i) *illustration*, j) *motivation*, k) *service* og l) *værktøj*. Og for meta-dimensionen opstilles r) *intern refleksion*, s) *videnskabsteori* og t) *samfundsfunktion*.

En fagidentitet er kendetegnet ved at der er fordelt tyngde mellem hvert af disse tyngdepunkter. Variationen mellem forskellige fagidentiteter udgøres altså teoretisk af variationer i tyngden i de forskellige tyngdepunkter. Summen af tyngde i tyngdepunkter i en dimension udgør dimensionens samlede tyngde.

Fagidentiteter opfattes i afhandlingen som eksisterende på en række forskellige typer af domæner. Særligt tre typer af domæner analyseres: *Systemet*, som den samlede sum af styrende regler og dokumenter, herunder skriftlige eksamensopgaver. *Lærebogssystemer*. Og *undervisere*. Ethvert system, ethvert lærebogssystem og enhver underviser kan altså principielt få kortlagt sin fagidentitet ved at fordelingen af tyngde mellem dimensioner og tyngdepunkter vurderes.

Der gennemføres således analyser af fagidentiteter knyttet til det danske almene gymnasiums matematikfags højeste niveau. Det sker for *systemet* i fire forskellige reformperioder: 1935, 1961, 1988 og 2005. For de to tidligste perioder analyseres lærebogssystemerne af hhv. *Andersen og Mogensen* (1942) og *Kristensen og Rindung* (1962). For den aktuelle periode analyseres to lærebogssystemer af *Carstensen, Frandsen og Studsgaard* (2007, 2010) samt af *Clausen, Schomacker og Tolnø* (2005).

Endvidere er gennemført en undersøgelse blandt matematikundervisere på det almengymnasiale område. På grundlag af en spørgeskemaundersøgelse udsendt til ca. 500 matematikundervisere, som er besvaret fuldt af 135 respondenter og delvist af 64 respondenter - dvs. 199 i alt.

I undersøgelsen spørges respondenterne direkte om deres fagidentitet samt direkte om en række holdninger til matematikfaget og 2005-reformens betydning for dette. Endvidere konfronteres respondenterne med en række matematiske situationer. Ud fra svar på spørgsmål angående disse udledes en fagidentitet. Der skelnes således mellem hvad lærerene eksplicit *deklarerer* og implicit viser ved deres svarmønster.

Afhandlingens hovedkonklusion er at gymnasiematematikfaget gennem alle undersøgte tider har været domineret af en fagidentitet med størst tyngde i *færdighedstræning* og derudover også i *begrebskendskab*. Over tid har *ræsonneret retfærdiggørelse* fået stadig mindre tyngde, mens anvendelses- og metadimensionen gradvist fylder mere og mere. Det er endvidere konkluderet at der ikke blandt undervisere kan identificeres fagidentiteter der fuldstændig afviser anvendelsesdimensionen. Men en del uenighed om fordeling af tyngde inden for denne dimension eksisterer.

Afhandlingen konkluderer endvidere at begrebet *fagidentitet* har noget virkeligt at sige om matematikfaget og bidrager til at forklare modstand mod forandringer i faget. I forlængelse heraf diskuteres perspektiverende muligheder for gennem fagkulturen og fagets infrastruktur at arbejde med udvikling af matematikunderviseres fagidentiteter.

Summary

This dissertation is about the identity of mathematics as a subject in the Danish general upper secondary school (*almene gymnasium*). The dissertation has its starting point in the conjecture that different understandings of what the identity of the subject is, is a significant source to conflicts between the agents of the subject and to friction within the field towards attempts of carrying out smaller or bigger changes in the content of the subject.

The dissertation defines *subject identity* as a theoretical construct, covering *a holistic view of what kinds of objects and problems that can be treated within the subject as an independent field*. The subject identities of mathematics are a multitudinous collection of objects, existing in many different variants.

To distinguish different subject identities from each other, the dissertation formulates a detailed conceptual framework. A subject identity is recognised as spanned by three independent dimensions: A *theory*-dimension, an *application*-dimension and a *meta*-dimension. To each dimension is formulated a set of mass points.

In the theory dimension is defined: a) *skill training,* b) *problem solving*, c) *reasoned justification*, d) *theoretical understanding*, e) *concept knowledge* and f) *convention knowledge*. In the application dimension is defined: i) *illustration*, j) *motivation*, k) *service* and l) *tool*. In the meta dimension is defined: r) *internal reflection*, s) *science study* and t) *societal function*.

A subject identity is characterized by an amount of mass assigned to each mass point. Variations of different subject identities is theoretically recognised as variations of mass in the different mass points. The combined mass in the mass points of a dimension makes up the total mass of that dimension.

In the dissertation subject identity is recognised to exist on different kinds of domains. Especially three kinds of domains are analysed. *The system*, as the total amount of governing rules and documents, including written exam tasks. *Systems of text books*. And *teachers*. Any *system*, *system of text books* and *teacher* makes up a domain that principally can get its subject identity mapped, by estimating the distribution of mass between the mass points.

In this dissertation subject identities bound to the Danish general upper secondary school mathematics' most advanced level are analysed. This will be done for *the system* in four different reform periods: 1935, 1961, 1988 and 2005. For the two earliest periods also two text book systems are analysed. It is *Andersen and Mogensen* (1942) and *Kristensen and Rindung* (1962). For the current period is two text book systems analysed: *Carstensen, Frandsen and Studsgaard* (2007, 2010) and *Clausen, Schomacker and Tolnø* (2005).

Furthermore a questionnaire among mathematics teachers in the general upper secondary school is presented. The questionnaire has been send to 500 mathematics teachers and answered fully by 135 respondents and partial by 64 respondents - i.e. 199 in total.

In the questionnaire the respondents are asked explicit about their subject identity and a series of viewpoints on the mathematics subject and the 2005-reform's impact on it. Furthermore the respondents are confronted with a series of mathematical situations. From their answers to questions about these situations, their subject identity is derived. A distinction is thereby made between what the teachers explicit *declare* and *implicit* shows by their pattern of answers.

The dissertation's main conclusion is that the mathematics subject of the general upper secondary level through all the investigated periods of time has been dominated by a subject identity with the largest amount of mass in *skill training* and in addition *concept knowledge*. Over time *reasoned justification* has gained still lesser mass, while the *application* and *meta* dimensions has gradually gained more and more mass. It is also concluded that among teachers, no subject identities are found that rejects the application dimension. But disagreement does exist on how much each of the mass points in this dimension should weigh.

The dissertation also concludes that the theoretical construct '*subject identity'* actually has something real to say about the mathematics subject, and can contribute to explain resistance to changes in the subject. In succession of this it is perspectival discussed what possibilities exists through the subject's culture and infrastructure to work with the development of teachers subject identities.

Indholdsfortegnelse

Forord ... 3
Resumé ... 4
Summary ... 6
Indholdsfortegnelse ... 8
1 Introduktion: Motivation og forskningsspørgsmål ... 10
1.1 Personlig motivation ... 10
1.2 Forskningsmæssig motivation ... 14
1.3 Forskningsspørgsmål ... 25
1.4 Afhandlingens opbygning ... 28
2 Indplacering i forskningslandskabet ... 30
2.1 Helhedsbeskrivelser af matematik ... 31
2.2 Helhedsbeskrivelser af matematikelementer ... 35
2.3 Indplacering i forskningslandsskabet ... 41
3 Begrebsskelet: Hvordan beskrives en ”fagidentitet for matematik”. ... 42
3.1 Identitetsbegrebet ... 42
3.2 Fagbegrebet ... 43
3.3 Begrebet ”fagidentitet” ... 44
3.4 Hvad begrebet ”fagidentiteter for matematik” skal kunne ... 46
3.5 Berøring med andre begreber ... 50
3.6 At skelne begrebets genstande ... 52
3.7 Opsummering: Begrebsskelet ... 61
4 Metode: Hvordan analyseres ”fagidentiteter for matematik i gymnasieskolen ” ... 62
4.1 Generelle metodologiske refleksioner ... 62
4.2 Metode til analyse af ’systemet’ ... 65
4.3 Metode til analyse af ’lærebøger’ ... 68
4.4 Metode til analyse af ’undervisere’ ... 71
4.5 Ramme for perspektiverende diskussion ... 78
4.6 Opsummering ... 79

5 Analyse: Fagidentiteter hos systemet ... 80
5.1 Analyse af historiske fagidentiteter ... 80
5.2 Analyse af aktuel fagidentitet ... 93
5.3 Samlet vurdering af fagidentiteter på systemdomænet ... 107
6 Analyse: Fagidentiteter hos lærebøger ... 110
6.1 Analyse af historiske lærebøger ... 110
6.2 Analyse af nutidige lærebøger ... 123
6.3 Sammenligning af lærebogssystemerne ... 136
7 Analyse: Fagidentiteter hos undervisere ... 140
7.1 Deklareret identitet ... 140
7.2 Fagidentitet og syn på fagets udvikling og tilstand ... 150
7.3 Sammenfatning: Fagidentiteter hos undervisere ... 160
8 Analyse: Undervisernes fagidentiteter ... 162
8.1 Sekvens på 16 opgaver ... 163
8.2 Syn på ”anvendte opgaver” ... 178
8.3 Fagligt samspil ... 190
8.4 Aggregering af svar til individuel fagidentitet ... 198
8.5 Sammenfatning ... 208
9 Diskussion - konklusion - perspektiv ... 211
9.1 Konklusion - svar på forskningsspørgsmål ... 211
9.2 Forbehold - besvarelsens styrke og rækkevidde ... 224
9.3 Perspektiv - fagidentitet og forandringsrum ... 228
10 Litteraturliste ... 238
11 Bilag ... 253

1 Introduktion: Motivation og forskningsspørgsmål

> Man kan godt gøre som du foreslår, men så må man fyre mig og ansætte en ingeniør i stedet!
> *Matematikkollega i gymnasieskolen, citeret efter hukommelsen.*

> Matematikundervisning er alt for vigtig til, at den kan overlades til matematikere.
> *Fysikkollega på RUC, citeret efter hukommelsen*

Denne afhandling er en samlet fremstilling af tre års forskningsarbejde inden for feltet *matematikkens didaktik* i sin bredeste forstand. Arbejdet har været *fagdidaktisk* i den forstand, at der ikke ligger nogen ambition om et bredere *almendidaktisk* perspektiv bag. Der er således tale om et arbejde på en *matematikfaglig* basis med en didaktisk vinkling, afspejlende min uddannelsesbaggrund som kandidat i matematik og fysik.

Med *fagdidaktik* forstår jeg groft sagt den disciplin der beskæftiger sig med ”undervisningsfagets hvad, hvorfor og hvordan”. Altså *hvad* der karakteriserer undervisningsfaget, *hvorfor* der undervises i det og *hvordan* undervisningsfagets praksis kan og bør være. Den sidste del beskæftiger sig mere konkret med undervisning og læring under forskellige omstændighder, og er i forskningen den almindeligvist mest adresserede af de tre.

Fokus i denne afhandling ligger primært på *hvad*-spørgsmålet. Altså hvad er egentlig matematik, særligt når det tilrettelægges som et fag der skal undervises i. At afhandlingen taler om *fagets identiteter*, indikerer at udgangspunktet for mit arbejde er, at dette er et spørgsmål der kan diskuteres og have forskellige gyldige svar.

Det er formålet med kapitel 1 at motivere, fremstille og operationalisere det overordnede forskningsspørgsmål, som har været drivkraften i mit arbejde. Det vil ske i tre dele. For det første en motivation som er dels *personlig* dels *forskningsmæssig*. Altså hvorfor finder *jeg* det interessant, og hvorfor er det interessant for *forskningsfeltet*. For det andet selve fremstillingen af forskningsspørgsmålet, dissekering af dets formulering for at klargøre betydning og opstilling af en række delspørgsmål. Og for det tredje en generel fremstilling af afhandlingens struktur.

1.1 Personlig motivation

Min personlige motivation for at kaste mig ud i matematikdidaktisk forskning kan groft sagt inddeles i to: En *privat* motivation, det vil sige nogle forhold der først og fremmest vedrører mig. Og en *politisk* motivation, det vil sige nogle personlige synspunkter vedrørende samfundet som helhed.

1.1.1 Privat motivation

Min private interesse i min forskning har flere komponenter. Dels en faglig interesse i matematik, dels en beskæftigelsesmæssig interesse i uddannelse. Og dels en optagethed af de mere filosofiske sider af sammenhængen mellem matematik og uddannelse.

Siden mine første år i grundskolen har matematik haft en høj stjerne hos mig. Faget faldt mig nemt. Det gjorde de fleste andre fag også, så forklaringen har nok været matematiks særkende i form af serier af opgaver af varierende karakter, med en konkret og ”kontant” belønning i form af ”hakker”.

Ved min gymnasiestart forestillede jeg mig nok at skulle studere noget samfundsvidenskabeligt. Men fra midten af 2.g blev det opgivet. Som politisk aktiv oplevede jeg den grad af luftighed som samfundsvidenskabelige universitetsstuderende kunne diskutere med. For mig blev naturvidenskab det mere konkrete valg, omend mødet med denne nok ofte giver de fleste det omvendte indtryk.

Matematik og naturvidenskab er for mig akademisk arbejde som kan bruges til noget. Ikke bare til at administrere, forvalte og analysere hvad andre gør eller bør og skal gøre, men til faktisk at skabe, undersøge og udrette ting. Det var under mine 2 år på RUC’s naturvidenskabelige basisuddannelse at jeg endeligt valgte at studere matematik og fysik.

I RUC’s matematik- og fysikmiljø mødte jeg en kombination af faglighed, tværfaglighed og metafaglighed, som har inspireret mig meget. Særligt studiet af matematiske strukturer som ren abstrakt ting, kombineret med studiet af matematiske modeller og -modellering, som den praktiske anvendelse af abstrakte strukturer til at undersøge det ekstramatematiske, fandt jeg fascinerende.

Da jeg efter at have skrevet speciale i 2008 om matematik og tværfaglighed i gymnasieskolen fik et vikariat som gymnasielærer, tog jeg alle disse erfaringer og synspunkter med. Og så vågnede jeg brat op. Til kollegaer med ganske anderledes fagsyn og til elever med en forventning om belønninger i form af ”hak” (hvis de da overhovedet havde forventninger).

Samtidigt trådte jeg ind i den stadigt nye gymnasieordning fra 2005. Der var slagord om tværfaglighed og metafaglighed omsat til ”faget” *almen studieforberedelse*. Her fyldte anvendelse og metarefleksioner meget i matematikfagets læreplan. Og samtidig forekom alle de forskellige praksisser mig, at være meget langt fra at realisere slagordene.

Min private motivation stammer således fra dette sammenstød mellem min egen begejstring for faget i den særlige variant jeg har oplevet på RUC, genkendelsen af denne på slagordsform og så oplevelsen af en anderledes praksis. Altså hvad er det der forhindrer at gode intentioner for faget realiseres? Det er således også derfor at jeg arbejder mere med faget som helhed, end med f.eks. et mere afgrænset aspekt af dettes undervisning og læring.

1.1.2 Politisk motivation

I Niss (1996, s. 13, min oversættelse) opstilles ud fra en historisk og aktuel analyse, tre fundamentale typer af formål (’*reasons*’) med matematikuddannelse, særligt på alment niveau:

(a) Bidrag til den *teknologiske og socio-økonomiske udvikling* af samfundet som helhed.
(b) Bidrag til *samfundets politiske, ideologiske og kulturelle videreførelse og udvikling.*
(c) Udstyre *individer med redskaber der kan hjælpe dem til at håndtere livet*, i de forskellige sfærer de lever i: uddannelse og beskæftigelse; privatliv; socialt liv; liv som borger.

Bag formål (a) ligger en generel omsorg for samfundet som et produktionsfællesskab af arbejdende individer, hvor matematikuddannelse kan bidrage til at forøge produktiviteten af det enkelte individs arbejde. Dels ved at kvalificere til bestemte nyttige funktioner, dels ved at opkvalificere individets udfyldelse af en funktion. Formål (a) er altså at forøge samfundets samlede velstand, uden at der dermed tages stilling til fordelingen af denne.

Arbejdsgiverorganisationen Dansk Industri vurderer, at Danmark i 2030 vil mangle mellem 16.000 og 21.000 personer med en lang videregående uddannelse inden for de tekniske samt natur-, veterinær- og sundhedsvidenskabelige områder, som er typisk matematiktunge fag. Dertil vurderes at ville mangle mellem 7.000 og 10.000 på det samfundsvidenskabelige område, primært indenfor jura og økonomi, hvoraf især sidstnævnte er matematiktungt. Til gengæld forventes et overskud af humanistisk udannede på mellem 500 og 2000 personer (DI 2010, s.12-13).

Fra fagbevægelsen fremhæves samme pointe. Det LO-ejede Ugebrevet A4 peger på at kandidatproduktionen fordobledes fra 1990 til 2010, men at andelen indenfor teknik faldt med ca. 8%-point, mod en stigning på 9%-point blandt humanister (Schmidt & Larsen 2012). Og Arbejderbevægelsens Erhvervsråd har beregnet, at det samfundsøkonomiske afkast af at uddanne en kandidat i matematik eller fysik er mere end det dobbelte af at uddanne en humanist, mens tallet er hhv. fire og syv gange større ved uddannelsen af en civilingeniør og en økonom[1] (Pihl 2012, s.12).

Ovenstående stiller ud fra formål (a) to krav til almen undervisning i matematik. Det skal dels *kvalificere* de unge til at tage matematikholdige uddannelser, dels skal det *skabe interesse* for dette. Den første udfordring er i hovedsagen et matematikdidaktisk anliggende. Den anden er af bredere kulturel art, om end matematikdidaktisk forskning spiller en væsentlig rolle i at løfte den.

Bag formål (c) ligger en omsorg for det enkelte individs mulighed for at være herre i eget liv, at være deltager i fællesskaber og at være borger i både det lokale, nationale og internationale samfund. Det kan både være af meget praktisk art, f.eks. at kunne håndtere spørgsmål om økonomi og planlægning i de forskellige sfærer af tilværelsen, men også af mere principiel art. F.eks. at kunne kritisk vurdere andres brug af matematik, herunder særligt at kunne navigere i et komplekst og højteknologisk demokratisk samfund. I den henseende kan matematikuddannelse altså have en bredere myndiggørende dagsorden.

Forholdet mellem formål (a) og (c) kan gøres til genstand for debat. Til "Initiativet for matematikundervisnings" konference om "gymnasiets matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav

[1] Beregningen nævnes for at indikere en gevinst. Bag beregningen ligger en antagelse om, at samfundsmæssigt afkast er ækvivalent med livsløn. En antagelse jeg er stærkt kritisk overfor, men som det ligger uden for rammerne af denne afhandling at diskutere.

og demokratikrav" kunne man f.eks. læse følgende af professor i matematik ved DTH (i dag DTU), Vagn Lundsgaard Hansen:

> »Jeg argumenterer ikke for terpeskolen, men der er for mange afledende effekter i skolesystemet for øjeblikket. Det må atter bringes i højsædet, at et afgørende formål med skolen er at tilegne sig fundamentale boglige kundskaber, som sætter en i stand til at fungere som borger i et højt udviklet samfund. Og her er matematikken et centralt fag.« (Hansen 1988, s. 27)

I samme rapport kan man læse følgende af Bent Christiansen, professor i matematik ved DLH (i dag DPU):

> »Min egen opfattelse er, at netop skolens formidling af den gennem tiderne akkumulerede menneskeskabte viden og kunnen udgør det grundlæggende middel til socialisering og normdannelse med henblik på liv og fællesskab i et demokratisk samfund.« (Christiansen 1988, s.55)

Hos Vagn Lundsgaard Hansen finder man et vist anspor af et modsætningsforhold mellem formål (a) og (c). Som repræsentant for aftagere af studenter der i høj grad skal trække på matematiske kompetencer, finder han disse særligt vigtige. De forstyrres imidlertid af "afledende effekter", der konferencens overskrift taget i betragtning, må forventes at være "demokratikrav".

Omvendt finder man hos Bent Christiansen, der repræsenterer en didaktisk helhedstænkning, det synspunkt at begge formål er vigtige. Citatet indikerer dog det særlige standpunkt, at de to formål ikke synes modstridende, men snarere opfyldes på en og samme tid, gennem faglig kvalificering.

Endelig er der formål af type (b) som er mindre tydelige. Hos Niss synes det især at høre til politiserede samfundssystemer, hvor en dominerende ideologi eller religion skal fremmes af samfundets skolesystem mere generelt. Den type formål artikuleres sjældnere.

Mit personlige standpunkt er, at matematikundervisning skal gabe over formål af alle tre typer. For det første skal undervisningen kvalificere og interessere flere unge mennesker til matematikholdig uddannelse. For det andet skal en stadigt større del af befolkningen blive i stand til at omgås matematikholdige situationer både aktivt og kritisk. Og for det tredje skal undervisningen bidrage til indsocialisering i et moderne naturvidenskabeligt verdensbillede. Tilsammen udgør disse tre elementer et væsentligt bidrag til at fastholde og udvikle et moderne demokratisk velfærdssamfund.

1.1.3 Personlig formodning

Dette kapitels to indledende citater indikerer noget om den formodning, der har drevet mig til at lave denne afhandling. Mødet mellem mine egne ideer om hvad en matematikundervisning, der løfter de skitserede politiske opgaver må indeholde, og så mine matematikkollegaers syn på hvad faget overhovedet kan gå ud på.

Min formodning ligger således i, at en væsentlig forklaring kan indfanges af begrebet *fagidentitet*. Altså at der ikke blot er tale om uenigheder om hvordan faget skal indrettes ud fra divergerende interesser og vurderinger, men derimod en mere grundlæggende uenighed om hvad faget overhovedet kan indeholde.

Her er det vigtigt at understrege at jeg ikke mener det giver mening at tale om *misforståelser* af hvad faget kan rumme. Gymnasielærere er uddannet til dets højeste niveau og kan således dårligt have ”misforstået” faget. Der er derimod tale om potentielt konfliktende ligeværdige *synspunkter*. Enhver manifestation af matematikfaget må nødvendigvis følge nogle af sådanne synspunkter – en identitet – og dermed komme i konflikt med andre manifestationer som har andre synspunkter.

1.2 Forskningsmæssig motivation

En personlig motivation og formodning er ikke et selvstændigt argument for at noget har forskningsmæssig interesse. Derfor vil dette afsnit forsøge at give en forskningsmæssig begrundelse for, at der er ”noget at komme efter”.

Med en *forskningsmæssig motivation* forstås en diskussion af hvilke aspekter af problemfeltet der gør, at det er relevant fra et forskningsperspektiv at kigge på det. En sådan diskussion kan oplagt tage afsæt i et eller flere nedslag på eksisterende forskning og relevante dele af praksis.

Jeg vil lave to typer af nedslag. Det første er et nedslag på et konkret stykke forskningsarbejde, som jeg opfatter mit eget arbejde som liggende i forlængelse af. Det andet er en række nedslag på nogle konkrete brudflader i undervisningsfagets historie. De to analyser vil til sammen danne baggrund for min forskningsmæssige motivation.

1.2.1 Modelleringskompetence som omdrejningspunkt

I forbindelse med udarbejdelsen af mit speciale i 2008, læste jeg Tomas Højgaard Jensens ph.d-afhandling fra 2007, *Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningspunkt – hvorfor ikke?* På mange måder sammenfatter denne et begrebsapparat for en RUC-tilgang til matematikfaglighed og et teoretisk og empirisk grundlag for at arbejde med en sådan i gymnasieskolen.

Højgaard Jensen tager afsæt i en personlig undren og frustration over (en oplevelse af), at matematisk modellering ikke spiller nogen væsentlig rolle i almen matematikundervisning i Danmark (Jensen 2007, s.3). Dermed menes ikke at der ikke indgår referencer ud af matematikkens eget domæne eller snak om modeller. Men der opleves en aftagende sammenhæng mellem forskellige opgavetypers anvendelsesmæssige potentiale og deres vægt i matematikundervisningens praksis (ibid, s. 7). Grundlaget er altså en kvalitativ forskel på forskellige ”typer” af opgaver.

Et eksempel (fra min hånd) kunne være følgende tre formuleringer af ”den samme” opgave:

Variant A	**Variant B**	**Variant C**
Hvordan bør en konservesdåse designes?	En konservesdåse har form som en cylinder med højden *h* og radius *r*. Dens volumen er 500 cm^3. Bestem forholdet mellem *h* og *r*, så overfladen bliver mindst mulig.	For en cylinderformet konservesdåse med højden *h*, radius *r* og volumenet 500 cm^3, er overfladen *O* som funktion af radius giver ved: $O(r) = 2\pi r^2 + \frac{1000}{r}$ a) Ved hvilken radius er overfladen mindst? b) Hvad er højden, når overfladen er mindst?

Variant A inviterer opgaveløseren til en lang række overvejelser over en virkelig situation. Svarmulighederne er mangfoldige og vil afhænge af en række antagelser, som svareren selv må opstille. Det skal dog være klargjort at opgavebesvarelsens formål er at demonstrere matematisk kompetence, ikke at reflektere i sproglige vendinger over spørgsmålet.

Variant B og C er begge grundlæggende ligeglade med at der er tale om en konservesdåse. Variant B repræsenterer for gymnasieelever et svært matematisk problem, som kræver selvstændigt arbejde, mens variant C først og fremmest træner omgang med veldefinerede løsningsalgoritmer.

Det er især opgaver, der som variant A pålægger eleven selvstændigt at bringe matematikken på banen i forhold til et ikke-matematisk problem, som har med ”modellering” at gøre og som rummer det der kaldes ”anvendelsesmæssig potentiale”. Højgaard Jensen opstiller på den baggrund følgende tre potentielle berøringer for sin undersøgelse:

A. *Er der grund til at være frustreret?* Spørgsmålet afvises, i det en besvarelse vil have makroskopisk og statistisk karakter og derfor falder udenfor en ambition om ”at virke konstruktivt inspirerende og praksisudviklende”. Samtidigt findes oplevelsen af at ”noget ikke er som det burde være” tilstrækkelig. Yderligere dokumentation findes ikke nødvendig.
B. *Hvad skal der til?* Spørgsmålet findes relevant for afhandlingen, men er ikke centralt af to grunde. For det første ”kendes svaret” i form af en række ingredienser; fordybelse, projektarbejde, deltagerstyring, problemløsning, mv. For det andet vil svaret få karakter af ”tilstrækkelige betingelser”, som lægger op til en uhensigtsmæssig ”best practice” strategi.
C. *Hvorfor sker det ikke?* Spørgsmålet defineres som det centrale i afhandlingen. Det bygger på en artikuleret antagelse om, at de fleste lærere ikke afviser den anvendelsesorienterede undervisning principielt eller på grund af dårlige erfaringer, men tværtimod på lange stræk er enig i behovet. Barriererne er derfor nogle andre og det er disse der skal undersøges.

Højgaard Jensen bygger på den baggrund sit arbejde op i to faser. For det første en *systematisering* hvor der teoretisk afklares en række potentialer for en matematikundervisning baseret på anvendelse, set dels fra et *matematikfagligt* og dels fra et *kognitions-psykologisk* perspektiv. Tillige afklares en række centrale begreber, som *modellering, problemløsning* og *kompetence*.

For det andet en *didaktificering*, hvor der med afsæt i fire deklarerede *ankerpositioner*, opstilles en ramme for hhv. *projekt*- og *kursusarbejde* i en undervisning baseret på anvendelse. Denne ramme afprøves i praksis gennem et konkret forsøg, hvor en dansk gymnasieklasse undervises inden for de opstillede rammer.

Det gennemførte forsøg afrapporteres i afhandlingen og med afsæt i indhøstede erfaringer diskuteres der forhindringer af eksemplarisk karakter for, at en matematikundervisning med fokus på anvendelsesorientering kan gennemføres. Diskussionen peger på fire typer af forhindringer.

To af disse typer var af planlægningsmæssig art. Det gælder for det første ”forvaltningen af tiden”, hvor kampen om tiden mellem forskellige undervisningskomponenter blev skærpet på grund af konflikter mellem et pensum- og et kompetenceorienteret fokus. For det andet ”muliggørelse af elevstyring", hvor de elevstyrede arbejdsformer der menes stærkt nødvendige for fokusering på modelleringskompetence, synes at være særdeles krævende.

En tredje type var af personmæssig art. Det drejer sig om "lærerens kompetencer og ressourcer". En kompetencefokuseret undervisning synes at være særligt fordrende for lærerens evner pædagogisk, fagdidaktisk og fagligt.

Den sidste type var af mere systemmæssig art og slog særligt igennem ved den afsluttende eksamen. Her opstod konflikter om dels validitet og reliabilitet for prøver der fulgte forsøgets ånd, dels konflikter om efter hvilke kriterier eksamensbesvarelser baseret på modelleringskompetence skal bedømmes. Groft sagt tekniske overfor processtyrende evner.

Højgaard Jensens afhandling repræsenterer det man kan kalde for et *eksistensbevis*. Gennem et konkret forsøg med en radikalt forandret praksis, baseret på principper der normalt ikke realiseres, kan man dokumentere at det faktisk kan lade sig gøre at udfolde en sådan praksis. Og det kan i tillæg hertil undersøges, hvilke specifikke forhindringer man stødte på undervejs, samt søge at generalisere disse til at have eksemplarisk værdi.

Et forsøg af den art er oplagt et af de første skridt på vejen i retning af at lade anderledes principper forme undervisningens praksis. Begrænsningen er, at det er svært at løfte erfaringen til et makroniveau. Det kan så at sige godt forklare hvilke forhindringer den som forsøger at gennemføre en forandret praksis støder ind i, men vil næppe give afgørende forklaringer på, hvorfor en ny praksis har svært ved at slå igennem som den almindelige.

Når Højgaard Jensen hives særligt frem her, er det netop fordi jeg på lange stræk deler hans faglige syn på matematikken og besidder samme undren over at faget ikke i mere udpræget grad bærer præg af dette syn. Samtidigt finder jeg ikke at undersøgelsen af dette "hvorfor ikke"-spørgsmål kan stoppe med Højgaard Jensens afhandling.

Afhandlingen har et snævert fokus på de problemer den enkelte lærer støder på, hvis denne skulle ønske at tone sin undervisning i retning af modelleringsfokus. Undersøgelsen er gennemført i 2000-02 i det forsøgsvenlige miljø der ledte frem til gymnasiereformen af 2005. Ved reformen flyttede begreber om anvendelse og modellering markant frem i læreplanen, projektarbejde blev gjort til en erklæret vigtig ingrediens og (tvær)fagligt samspil til en selvstændig pointe.

Alligevel synes der stadig ikke at være tegn på at undervisningen for alvor forandrer sig. I hvert fald ikke i retning af fokus på modelleringskompetence. Forklaringen på dette kan altså med en vis rimelighed hævdes at stikke dybere, end det rent formelle.

Kapitlets indledende citat af en gymnasiekollega har således været en vigtig retningspil for min problemafgrænsning. Bemærkningen om at vedkommende måtte fyres og erstattes af en ingeniør faldt netop i forlængelse af en diskussion om opgavetypen, som er repræsenteret ved ovenstående variant A. Der er for den lærer ikke umiddelbart tale om en praktisk afvejning, om personlige ressourcer eller systembarrierer, men om en uenighed om hvad der overhovedet hører til indenfor rammerne af en undervisning med overskriften "matematik".

I familie med dette er det andet indledende citat fra en fysikkollega på RUC. Det udsiger at det som er de virkeligt vigtige pointer ved at have (almen) undervisning i matematik, er nogle andre end det som personer med en dyb faglig rodfæstning i matematikfaget vil have fokus på. Derfor må undervisningen – sagt som provokation – varetages af andre end matematikere (f.eks. fysikere, ingeniører, biologer og økonomer).

Begge dele indikerer altså at matematik som gymnasialt undervisningsfag præges af konkurrerende *identiteter*. Altså ikke modsætninger mellem folk der "har forstået" og "ikke har forstået", men mellem folk med modsatrettede – til tider uforenelige – principielt ligeberettigede synspunkter.

Min ambition er altså ikke at lave det samme som Højgaard Jensen eller at påvise at han tog fejl på et eller andet punkt. Min ambition er at løfte diskussionen fra det konkrete tilfælde til en mere generelt niveau. Dette fordi jeg ønsker at undersøge eksistensen af forskellige identiteter for matematik som gymnasiefag, med henblik på at forstå hvad modsætningers mellem disse kan have af betydning for muligheden for faktisk at gennemføre mere overordnede forandringer af fagets indhold (i modsætning til forhindringer for "den enkelte eksperimenterende underviser").

1.2.2 Nedslag på brudflader i matematikundervisningens historie

Da jeg ikke opfatter nogle få personlige oplevelser og et enkelt projekt på grænsefeltet mellem forskning og praksis, som tilstrækkelig motivation, vil jeg også her forsøge at se på nogle mere overordnede tilfælde af brydninger i matematikundervisningens historie.

Konkret vil jeg se på "den nye matematik" (også kaldet "60'er matematikken", fordi den havde sin storhedstid i 1960'erne), på Dansk Matematisk Forenings "matematiklandsmøde" i 1981 og på de såkaldte "Math Wars", som udfoldede sig i USA omkring midten af 1990'erne.

Min påstand er ikke, at disse tre nedslag tilsammen udfolder hvad der er at sige om brydninger over matematikfagets indhold. Men på forskellig vis repræsenterer de forskellige former for både fagindhold og forandringsstrategier. Derfor udspænder de tilsammen en relevant eksemplaritet.

"New Math" - den ny matematik

Med rødder i det gamle koloniale uddannelsessystem, stod matematikuddannelse på alle niveauer i USA omkring 1900 stort set, hvor det havde stået i 200 år. Undervisningen tog på sekundærniveau ('high school') sit afsæt i en opdeling i særskilte emnekurser indenfor aritmetik, geometri og algebra. Med afsæt i University of Chicago High School, Illinois, gav E.H. Moore, afgående formand for American Mathematical Society, i 1902 sin opbakning til bestræbelser på at forny undervisningen (Stanic&Kilpatrick 1992; Kilpatrick 1997a).

Under overskriften "unified mathematics" forsøgte en række forskellige reform-strømninger at opfylde to målsætninger. For det første at nedbryde skellet mellem de forskellige emner. For det andet at nedbryde skellet mellem matematik og andre fag. Bestræbelserne fandt sted samtidigt med mere generelle uddannelsesreformprojekter og havde sin begrundelse i en ganske massiv udvidelse af antallet af 14-17 årige der gik i skole (fra 10% i 1890 til 70% i 1940) (Stanic&Kilpatrick 1992).

Reformbestræbelserne blev mødt med modstand i matematikmiljøet, hvor der frygtedes for fagets almindelige stilling. Særligt rollen som ”mental discipline theory” og ” the beauty of mathematics” (ibid.). Konflikten tegnede sig mellem matematikere og matematiklærere på den ene side og uddannelsesreformatorer på den anden. I 1921 stiftedes National Council of Teachers in Mathematics (NCTM), med det formål at repræsentere førstnævnte overfor sidstnævnte (Stanic 1986). Dette udtrykte at den voksende gruppe af matematiklærer i almindelighed reagerede defensivt (Stanic&Kilpatrick 1992) og i 1920'erne mistede reformbevægelsen sin styrke (Kilpatrick 1997a).

Ved indgangen til 1950'erne havde matematikundervisningen altså ikke ændret sig afgørende. På det tidspunkt skabte status quo utilfredshed og banede derfor vej for en ny reformbevægelse (Fehr 1976, s.49). Bevægelsen tager særligt til i kølvandet på 2. verdenskrig. Matematikkens betydning for krigsførelse og konstatering af dårlige matematikkundskaber blandt rekrutter, samt den stigende betydning af teknologi og videnskab, med dertil hørende behov for højtkvalificerede arbejdskraft, førte til en række udredninger (Gjone 1985, del I, s. 1-6).

Særligt pres for reformer kom fra universitetsmiljøerne, der fokuserede på matematikkundskaberne hos elever der skal videre på college/universitetet. Det første egentlige reformprojekt igangsættes i 1951 med nedsættelsen af University of Illinois Committee on School Mathematics (UICSM), som frem mod 1958 udviklede et reformprogram målrettet ”high school”-elever som skulle studere matematikholdige fag på college. Centralt i arbejdet var et samlet bud på et undervisningsmateriale (Fehr 1976, s.49-50; Gjone 1985, del I, s. 8f).

Overgangen fra lokale reformprojekter til en ”national revolution” sker i kølvandet på det såkaldte ”sputnik-chok” i efteråret 1957, hvor Sovjetunionen som de første sender en kunstig satellit i kredsløb om Jorden. Med det teknologiske kapløb bliver uddannelse – særligt matematikuddannelse – til forsvarspolitik, blandt andet med vedtagelsen af ”National Defence Education Act”. Som noget nyt blev der investeret mange føderale ressourcer i udvikling og fornyelse af uddannelserne, særligt indenfor matematik, naturfag og fremmedsprog (Gjone 1985, del I, s. 37).

Det nok mest indflydelsesrige udviklingsprojekt blev School Mathematics Study Group (SMSG), som nedsattes i 1958. UICSM-projektet fik som det mest gennemarbejdede eksisterende projekt, en meget stor indflydelse i SMSG. SMSG's primære indflydelse skete ved dels at udarbejde et sæt af lærebøger til 7.-12. klassetrin (”middle-” og ”high school”), dels ved meget aktivt at udbrede dette system på ryggen af store bevillinger fra National Science Foundation (NSF) (ibid, s. 42-46).

Indholdsmæssigt var de væsentligste træk ved denne ”ny matematik” (også kaldet ”moderne matematik”), at forene de adskilte discipliner til en samlet helhed, med udgangspunkt i et fælles grundlag i begreberne ”mængder”, ”relationer”, ”afbildninger”, ”operationer” og ”strukturer”.

Det betød at algebra skulle være studier af strukturer, hvoraf de forskellige talområder var konkrete realiseringer. Dette kunne blandt andet komme til udtryk ved at udsagn som ”3 + 4 = 4 + 3” retfærdiggjordes ved henvisning til kommutativitet, frem for konstateringen af at begge dele giver 7. At man frem for ligninger og deres løsninger, talte om "udsagn" og deres "løsningsmængde". Og at skelne skarpt mellem et tal ("number") og de forskellige tegn ("numerals") der repræsenterer tallet.

Det betød endvidere at klassisk geometri skulle erstattes med studiet af "rum". I praksis ved at fokusere på vektor-begrebet, samt at geometri og algebra kunne forenes i begrebet vektorrum. Det blev ligeledes afgørende at geometri handlede om mængder af punkter. Eksempelvis at en trekant var en forening af tre ikke kolineare punkter og linjestykkerne mellem dem.

Også andre fænomener som talsystemer med andre grundtal end 10, kongruens (modulo-begrebet) og tidligere introduktion til analysen med afsæt i begreber om kontinuitet og grænseværdi kom på programmet (Fehr 1976, s. 85-86; Kline 1973, s.1, s.103-104, s.111),

Inspirationen til denne nyorientering kom i høj grad fra det arbejde som det franske matematikerkollektiv "Bourbaki" udførte fra 1934 og frem. Her blev den eksisterende matematiske teoribygning skrevet om, så den udtryktes ved mængder, relationer og strukturer, baseret på tre grundlæggende "moderstrukturer": Algebraiske-, topologiske- og ordningsstrukturer (Blomhøj et.al. 1984, s. 43f).

Bourbaki-gruppen løftede på mange måder matematikken ud af den "grundlagskrise", som havde plaget den siden slutningen af 1800-tallet. Med et pragmatisk program, opbyggedes således den kendte matematik på aksiomer formuleret i et formelt sprog fælles for alle "discipliner". (Ibid, s. 29f). Oplagt fik dette arbejde udbredelse blandt matematikere over hele verden og derfor også indflydelse på uddannelsessystemerne (Ibid, s.80f).

"Ny matematik" forblev således ikke noget isoleret amerikansk fænomen, men fik aflæggere i mange lande. Den enkeltstående begivenhed der tilskrives den største indflydelse, er OEEC's (senere OECD) seminar i 1959 om matematikkens tilstand på Royaumont-slottet i Frankrig.

Ved Royaumont-seminaret mødtes fremtrædende matematik-personligheder fra OEEC's medlemslande, for at diskutere tre spørgsmål: 1) Ny tænkning i matematik, 2) Ny tænkning i matematikuddannelse og 3) Implementering af reformer. Spørgsmålene indikerer at det var reformernes indhold, ikke deres nødvendighed, som var til debat. Ved seminaret var stemningen, at problemet handlede om kløften mellem skole og universitet, hvorfor førstnævnte måtte tilpasses. (Gjone 1985, del II, s.56f).

Udkommet af Royamont-seminaret var blandt andet rapporten "New Thinking in School Mathematics" på baggrund af hvilken der nedsattes en international ekspertgruppe med det formål at tegne konturerne af nye undervisningsmaterialer. Denne mødtes i efteråret 1960 i Dubrovnik i Jugoslavien. Herfra udsendtes rapporten "Synopses for Modern School Mathematics" (ibid, 62f.).

Dubrovnik-rapporten adresserede dele af pensum (algebra, geometri og statistik), specielt for det øvre sekundære niveau. Den blev en væsentlig inspirationskilde for nationale projekter i OECD-medlemslandene, herunder Danmark. Fra dette udgangspunkt spredte tanken sig til primært skoleniveau og også til lande uden for OECD (Kilpatrick, 2012).

I Royamount-seminaret deltog fra Danmark Ole Rindung, samt som oplægsholder professor Svend Bundgaard. Sammen med bl.a. Erik Kristensen, Henrik Meyer og professor i fysik Mogens Pihl, kom de til at udgøre inderkredsen i fornyelsen af den danske gymnasieskoles matematikundervisning. Fornyelsen stod på ryggen af anbefalingerne fra den såkaldte ”teknikerkommission”, nedsat i slutningen af 1950’erne.

Ole Rindung havde som undervisningsinspektør stor indflydelse på gymnasieskolens matematikundervisning. Hans største indflydelse skete dog gennem udgivelsen af lærebogssystemet ”Matematik 1-3”, sammen med Erik Kristensen, der havde deltaget i Dubrovnik-gruppen (Iversen 1996, s. 47f).

Første bind af ”Kristensen og Rindung” udkom i 1962 og fulgte tæt principperne for ”ny matematik”. I tillæg blev der med tilskud fra OECD i juli 1959 og 1960 afholdt kurser af små 2 ugers varighed hos Svend Bundgaard på Århus universitet, hvor matematiklærere kunne blive introduceret til den ny tænkning. Lignende kurser afholdtes frem til 1970 (Munkholm 2008, s.603-4).

”Kristensen og Rindung” vandt enorm udbredelse. Vurderinger siger at det helt op til midten af 70’erne blev benyttet i ca. 90% af klasserne (Jensen 2007, s.56). Bogsystemet udkom helt frem til starten af 80’erne og ”ny matematik” vurderes først for alvor at miste sin indflydelse i Danmark ved gymnasiereformen i 1988 (Ibid, s. 39).

”Ny matematik” var dog ikke uden kritikere. Allerede i 1955 advarede professor Morris Kline mod udviklingen. Med afsæt i en voldsom kritik af den traditionelle undervisning, kaldte han tankerne fra bl.a. UISCM for »the opposite extreme« (Kline 1955). I marts 1962 tog han initiativ til en artikel stærkt kritisk overfor ”ny matematik”, som blev undertegnet af over 60 fremtrædende matematikere. Og som det mest kendte udsendte han i 1973 bogen ”Why Johnny can’t add: The Failure of the New Math” (Kline 1973), som er blevet kaldt »the last shot« mod ny matematik (Kilpatrick 1997a).

Klines kritik af ”ny matematik” tog især sit afsæt i dennes abstrakte karakter. Han opfattede det som ”matematik for matematikkens egen skyld”. Som en dyrkning af det abstrakte uden bekymring for det konkrete. Hans eget radikale program lød, at matematikken skulle bindes tæt til studiet af ”den fysiske verden” (Kline 1955). Anvendelsesorienteringen var dog heller ikke fjern for (nogle af) arkitekterne bag ”ny matematik” (Fehr 1976, s. 77), så måske var det en brugbar retning? I 1972 stoppede NSF sine bevillinger til SMSG og ”ny matematik” begyndte at sygne hen. I stedet trådte en bevægelse der kaldte sig ”back to basic”.

Damerow&Westbury (1984, s.22) opsumerer om ”ny matematik”, at der udførtes beundringsværdige eksperimenter, som det aldrig lykkedes at generalisere til hele skolesystemet. Og Kilpatrick (1997b) sammenfatter i alt fem erfaringer:

1) Reformer må være lokale. Nye materialer, bøger, kurser, mv. er gode redskaber, men forandring sker i klasseværelset.
2) Mange gode intentioner kan ikke formidles i bøger. F.eks. problem-løsning. Det kræver en undervisningsstil, som lærerne skal kende og kunne praktisere.
3) Det er lettere at ændre på læreres viden om matematik, end på måden de underviser. Fokus lå på ”out-of-class product” frem for ”in-class process”.

4) Forskellige curricula med forskellige mål, kan dårligt sammenlignes med den samme test.
5) Det er meget komplekst at forandre matematikundervisning. Man skal undgå at lade sig lokke af smarte ord fra de erfaringer man har gjort sig.

1981: "Landsmødet om matematikken i Danmark

I Danmark påbegyndte Dansk Matematisk Forening (DMF) i foråret 1979 forberedelsen af at "landsmøde om matematikken i Danmark", som afholdtes i maj 1981 og blev afrapporteret i DMF (1981). Mødet skulle have det dobbelte sigte at give et helhedsbillede at dansk matematik, samt at pege på ønskelige udviklinger. Som forberedelse arbejdede fem udvalg med forskellige aspekter af forskning og uddannelse i matematik.

Udvalget for gymnasieundervisning og gymnasielæreruddannelse opstillede i sin rapport til landsmødet fire punkter, som bør/burde kendetegne matematikundervisningen for alle gymnasieelever:

> »
>
> 1) Matematiks specielle natur, som bl.a. kommer til udtryk ved den proces, der består i intuitiv forståelse af en sammenhæng, formulering af en sætning og bevis for denne,
> 2) nogle matematiske emner, der er centrale derved, at de indgår i mange forskellige anvendelser, samt eksempler på sådanne anvendelser,
> 3) nogle autentiske anvendelser af matematik, der behandles, fordi anvendelsesområdet er af væsentlig samfundsmæssig betydning,
> 4) dele af matematikkens historie og matematik i kulturel, filosofisk, historisk og samfundsmæssig sammenhæng.« (DMF 1981, s. 179)

Disse fire punkter får en del opmærksomhed i den efterfølgende debat blandt lærerne. Matematiklærerforeningen foreslår således en ramme for undervisningsforsøg, hvor det meste af stoffet om relationer, kompositioner, grupper, mv. udgår til fordel for andre emner, f.eks. forskellige former for omgang med modeller samt belysning af fagets historiske og samfundsmæssige betydning. Dertil nytænkning af arbejdsformer, med blandt andet gruppeprojekter, feltarbejde, tværfaglige samarbejde og rapportskrivning (Styrelsen 1982).

Foreningen afholdt endvidere kurser i tråd med anbefalingen. Fra kurset "Tradition og nytænkning i matematikundervisningen" rapporteres således om generel opbakning til udviklingen væk fra 60'er-matematikken og i retning af de fire punkter, omend nogen uafklarethed om "autentiske anvendelser" (Schultz 1982). Der afholdtes også et lige ledes positivt oplevet kursus med overskriften "Inddragelse af historiske emner i matematikundervisningen" (Wonsyld&Holst 1982).

Debatten i foreningens blad er ret begrænset. En gruppe lærere mener at fagets succes har »været nøje knyttet sammen med den systematiske opbygning, den logisk præcise deduktion« og mener derfor at faget »også som skolefag må bevare sin deduktive karakter og sin præcise begrebsverden«, før der kan arbejdes med reelle anvendelser (Christiansen et.al. 1982). Et medlem af landsmødets forberedende udvalg advarer mod at man i vendingen "samfundsmæssig betydning" glemmer de eksakte videnskaber (Munkholm 1982).

Andre slår til lyd for at man »skal flytte vægten fra det specifikt studieforberedende mod det almendannende ved at "ofre bredden for dybden"«. Dette ved »en udvikling bort fra en opfattelse af matematikken som et isoleret og selvtilstrækkeligt fag«, bl.a. ved »tid til i matematiktimerne at tage problemer op, som kommer udefra«, også selvom det »bliver de simple dele af matematikken man kan arbejde med« (Nielsen 1983).

Selve processen bliver også behandlet kritisk. En lærer udtrykker f.eks. bekymring for at matematik lærerne »endnu engang – som i 1961 – [vil] blive taget på sengen og påtvunget en matematikundervisning, som nogle få indflydelsesrige personer har udtænkt« (Schultz 1982). Og 23 lærere fra Esbjerg og Varde kritiserer foreningens styrelse for at have »så travlt med at få presset en ny bekendtgørelse for matematik på den matematiske linje igennem« (Claussen, et.al., 1983).

Processen munder ud som en del af en samlet gymnasiereform i 1988, hvor matematikfagets stilling retænkes ganske radikalt (se kapitel 5). Ved denne reform får DMF-udvalgets anbefalinger til landsmødet i 1981 ganske stor indflydelse.

"Math Wars" – standard-baseret curriculum i USA

Også i USA tog den overordnede udvikling en ny retning i 80'erne. Særligt NCTM indtog en mere aktiv rolle i udviklingen af matematik som skolefag. Med pamfletten *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*, slog NCTM til lyd for et curriculum med problemløsning ('problemsolving') som omdrejningspunkt.

Fraværet af et fælles nationalt curriculum gør udviklingsopgaven i USA anderledes end i Danmark. De ca. 15.000 skoledistrikter fastlægger i princippet selv undervisningens mål og midler, men i praksis sker dette almindeligvis ved at adoptere et curriculum i form af et lærebogssystem.

I kølvandet på en række rapporter om problemer med skoleelevers matematikevner, udsendte NCTM i 1989 publikationen *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Ideen var at lave et sæt standarder, som stater, skoledistrikter og lærere kunne adoptere som en national fællesramme. Standarderne byggede således på et problemløsningsperspektiv, og med støtte fra NSF udvikledes de første standard-baserede lærebøger i midten af 1990'erne (Schoenfeld, 2007).

NCTM's "standards" blev opfattet som en udfordring af "traditionelt curriculum", med nedtoning af papir-og-blyant beregninger, udenadslære, algoritmer, stringente beviser samt autoritative undervisningsformer. Fokus skulle flytte fra *indhold* til *proces*. Eleverne skulle i overensstemmelse med konstruktivistisk teori selv "opdage" begreberne, for at kunne forstå dem. Computere skulle overtage besværlige og omfattende beregninger, osv. (Schoenfeld 2004; Jackson 1997).

Få stater – primært Californien og Texas – spiller en meget stor rolle for hvilke kommercielle lærebogssystemer der bliver dominerende. Disse to stater har tilsammen ca. 20% af befolkningen og aftager således en meget stor andel af det samlede antal lærebøger. F.eks. udarbejder Californien et "mathematics framework", som lærebøger skal leve op til, for at staten vil støtte skolernes indkøb af disse. Denne ramme er altså i praksis dagsordensættende for hele USA.

Rammen revideres planmæssigt hvert syvende år. Det skete således i 1985 og igen i 1992. Ved 1992-revisionen blev rammen tilpasset NCTM's standarder. Forandringerne mødte dog stor modstand fra grupper primært bestående af forældre, men også professionelle brugere af matematik samt personer med en politisk interesse i en tradition-reform-konflikt inden for uddannelsesverdenen. Først og fremmest konservative republikanere (Jackson 1997a; 1997b).

Det standard-baserede curriculum bliver af sine modstandere døbt "fuzzy math", fordi det bevæger sig væk fra tanken om matematik som noget der leverer entydige svar. Modstanden opnår politisk indflydelse og allerede i 1997 udsendes en ny ramme, baseret på et "traditionelt curriculum". Kampen mellem de forskellige synspunkter kendes i dag som matematikkrigene – "The Math Wars".

Med afsæt i Californien bliver "modstandsbevægelsen" til et nationalt fænomen. I 1998 finder den føderale uddannelsesminister Richard Riley det nødvendigt, i en tale til American Mathematical Society, at kræve "en civiliseret og konstruktiv tone" i debatten. Og da hans ministerium i 1999 fremhæver 10 standard-inspirerede curriculas som "eksemplariske" eller "lovende", underskriver over 200 matematikere en erklæring om, at ministeren må underkende dette (Schoenfeld 2007).

En af de matematikere der talte aktivt imod NCTM's standarder var professor i matematik ved University of California, Hung-Hsi Wu. Wu kritiserer ideen om "åbne problemer" for i praksis at efterlade eleven med indtryk af specifikke ad hoc svar, uden at se sammenhængen. I stedet bør eleverne trænes i stringente løsninger, gerne på åbne problemer (Wu 1994). Wu agiterer af samme grund for et væsentligt fokus på euklidisk geometri (Wu 1996a). I en mere generel erklæring siger Wu:

> »We should teach mathematics for what it is, unless and until we are willing to start labeling foundational mathematics courses as "minimal survival kits for the sciences.« (Wu 1996b)

For Wu er det tydeligvis afgørende at han i skolens matematikundervisning kan genkende det han selv foretager sig, som professionel matematiker. Fra tilsvarende kant høres også modsatrettede synspunkter. Matematikerne Solmon Garfunkel og David Mumford tegner en modsat vision:

> »Imagine replacing the sequence of algebra, geometry and calculus with a sequence of finance, data and basic engineering… In math, what we need is "quantitative literacy," the ability to make quantitative connections whenever life requires« (Garfunkel&Mumford 2011)

Hvor Wu ser skolefaget matematik som en afspejling af matematik som noget meget generelt, ser Garfunkel og Mumford det altså som et praktisk værktøj til noget meget konkret. Fra Wu's synspunkt kan denne sidste vision slet ikke gives etiketten "matematik".

1.2.3 Fagidentitet som konflikt-felt

Nedslagene på en række af brudflader i matematikundervisningens historie viser, at matematikundervisning på ingen måde er noget konfliktfrit felt. Tværtimod. Der er tale om et fag hvor den faglige sagkundskab kan være i dyb splid over hvad undervisningens mål og indhold skal være.

I den "ny matematik" forsøgte man at skabe et undervisningsfag i forskningsfagets billede. Altså at forberede eleverne på bestemte faglige begreber og tænkemåder, som forekom relevante. Det mødte modstand fra andre reformorienterede, som mente, at faget fik en alt for abstrakt og nytteløs karakter. Samtidig mødte det stor modstand fra traditionalister, som mente at opbygningen af solide konkrete færdigheder (typisk i talberegninger), blev erstattet af en abstrakt omgang med begreber og symboler, som mere havde sproglig karakter, end matematisk.

"Ny matematik" blev praktiseret forskelligt rundt om i verden og også erstatningerne blev varierende. I Danmark kom retænkningen af matematikundervisningen særligt til udtryk ved matematiklandsmødet i 1981, hvor anbefalingen var at undervisningsfaget i højere grad skulle afspejle matematik som en almindelig menneskelig praksis. Både aktuelt og naturligt. Også dette mødte kritik fra dele af fagmiljøet.

I USA blev erstatningen, efter nogle års "back to basis", NCTM's standarder med større vægt på processen i form af problemløsning, opdagelse, udforskning, mv. Dette stødte på så massiv modstand fra offentligheden og dele af matematikmiljøet, at misæren blev kaldt en krig. Og selvom der i processen blev blandet mange forskellige aspekter ind i det, bl.a. en generel politisk konflikt, så var også matematikerne meget uenige om det kloge i forandringen.

Der synes altså i mange af de store forsøg på at reformere matematikundervisningen at opstå grundlæggende spændinger, selv blandt de mest matematikkyndige. En del af forklaringen er naturligvis varierende interesser. En universitetsprofessor er måske mest interesseret i at skolerne forbereder til universitetsstudier. En skolelærer vil tit bekymre sig om elevernes velbefindende. Og forældre vil helst have at undervisningen ligner den de kender fra deres egen skoletid.

Men trods politiske, økonomiske og personlige interesser, så synes der at ligge noget mere dybtliggende under, nemlig varierende syn på hvad der overhovedet konstituerer matematik som fag. Igen er der ikke tale om en uenighed mellem dem der har ret og dem der tager fejl. Det er ikke et spørgsmål med absolutte svar. Der er tale om en konflikt mellem ligeværdige synspunkter - *fagidentiteter*, som tillige vækker enorme følelser når de udfordres. Derfor er det forskningsmæssigt nødvendigt at få undersøgt sådanne synspunkter og deres betydninger ved forsøg på reform.

Nedslaget på Højgaard Jensens afhandling viser endvidere et ganske radikalt bud på hvad en reform af (dansk) matematikundervisning kunne byde på i dag. På lange stræk er der tale om en praksis der sagtens kunne udfoldes inden for den gældende ordning, men som intet tyder på bliver det. Igen kan en del af årsagen formentlig hentes i, at mange matematiklærere ikke ser deres fag i den foreslåede praksis. Den udfordrer noget helt grundlæggende ved deres (bevidste eller ubevidste) syn på faget.

Det er her vigtigt for mig igen at understrege, at jeg ikke finder det rimeligt at reducere sådanne konflikter til at være af rent psykologisk art. Eksempelvis at nogen har "forstået" og andre "misforstået" sagens kerne. Jeg mener heller ikke det kan reduceres til uenigheder om hvad der objektivt set er den "bedste praksis", selvom det ofte diskuteres sådan.

Når matematikfaglighedens kernetropper er uenige om, hvad der bør være indholdet i matematikundervisningen, så må det handle om forskellige ligeværdige syn på faget. Ambitionen med at forstå dette bliver således et forsøg på at opstille et begreb for "fagidentiteter".

Et sådan begreb kan ikke kun være psykologisk. Altså at interessere sig for *menneskers* fagsyn. Det skal også kunne beskrive det eller de fagsyn, der manifesterer sig i en læreplan, en lærebog, en undervisningsaktivitet og andre steder hvor matematik er manifesteret. For det er konflikten i mødet mellem sådanne identiteter – f.eks. ”lærer møde læreplan” – der er forskningsmæssigt relevant. Det er altså ikke menneskeidentiteter, men *fag*identiteter, som må være i fokus.

1.3 Forskningsspørgsmål

Min personlige motivation er altså i høj grad en undren over de uoverensstemmelser jeg har oplevet mellem matematikfagpersoner over fagets kerne, kombineret med en grundlæggende politisk bekymring for om Danmarks som samfund leverer tilstrækkeligt på den almene matematikuddannelse. Dette bakkes op af en forskningsmæssig motivation, som siger det er relevant at undersøge, hvorfor udvikling og reformering af matematikundervisning støder på så store forhindringer og konflikter.

Det er klart at man ikke i én afhandling kan løfte hele denne opgave. Derfor må den afgrænses, så dybden bliver optimal. F.eks. kommer afhandlingen ikke til direkte at beskæftige sig af nyttevirkningen af matematikuddannelse, selvom denne er en væsentlig motivation for mig. Derfor vil jeg heller ikke beskæftige mig med hvilken undervisning der optimerer nytten.

Ej heller vil jeg interessere mig for hvad der øger indlæringen for eleverne. Meget forskning tager sit afsæt i sådanne undersøgelser, men glemmer samtidigt at reflektere over hvad det overhovedet er fornuftigt at bruge elevernes tid på at lære dem. Som om faget eksisterer objektivt og indiskutabelt, og blot skal doceres på den mest optimale måde. Men det vil jeg altså heller ikke undersøge.

Afhandlingen vil i stedet fokusere på at undersøge matematikfaget i forskellige konstruktioner, med det formål at diskutere muligheder og forhindringer for at realisere disse. På andre tidspunkter må det afklares hvilken konstruktion der tjener hvilke formål bedst. Men når en konstruktion er udpeget som ønskelig, så vil denne afhandling diskutere en bestemt type af forhindring for dens gennemførelse, nemlig det forhold at den vil repræsentere et fagsyn der divergerer med andres fagsyn.

Afhandlingen vil således være opbygget efter at skulle besvare følgende forskningsspørgsmål:

> *Hvilke fagidentiteter dominerer i dag gymnasiematematikfaget?*

Her var min oprindelige intention at forskningsspørgsmålet også skulle have haft en mere handlingsorienteret del i form af tilføjelsen ”*og hvad betyder dette for muligheden for at gennemføre overordnede ændringer af identiteten?*”. Rammerne for færdiggørelsen af afhandlingen har imidlertid betydet, at dette aspekt må udgå af selve forskningsspørgsmålet, men fortsat vil indgå som et aspekt af diskussionen af afhandlingens resultater.

1.3.1 Diskussion af forskningsspørgsmål

Det opstillede forskningsspørgsmål rummer mange aspekter og dele, som jeg her vil uddybe og diskutere et ad gangen.

Med ”fagidentiteter” afgrænses to ting. For det første at begrebet ”identitet” vil være nyttigt at bruge om noget der helhedsbeskriver faget. For det andet at der findes flere af dem og at det ikke fast hvilke der findes (derfor ubestemt flertal). Med ordet ”dominerer” menes at sådanne ”identiteter” eksisterer samtidigt, men at nogle kan være mere udbredte end andre. Samt at nogle kan være mere dagsordensættende for fagets mange praksisser, end andre.

Når der spørges ”hvilke identiteter dominerer”, spørges altså til hvilke af de mange eksisterende identiteter for faget, som er mest udbredte. Og med ”i dag” menes samtidigt med projektets gennemførelse (dvs. første halvdel af 2010’erne). Begrebet ”identitet for faget” vil få en meget dybere behandling i kapitel 3. I dette kapitel er begrebet således intuitivt anvendt.

Med ”gymnasiematematikfaget” forstås den samlede organisering af undervisning i matematik på det gymnasiale niveau i Danmark. Dette vil dog i praksis blive afgrænset til undervisningen i det *almene* gymnasiums A-niveau. Det ”almene” gymnasium fordi faget her fremstår renest, uden at tage særligt hensyn til f.eks.”handel” eller ”tenik”. På A-niveau fordi det er her faget forventes at være mest renset for dagsordener, som ikke er betinget af fagets egen (mangfoldige) faglighed.

Den del af forskningsspørgsmålet som er udgået skal også her omtales kort. Her optræder ordet ”identiteten” i bestemt ental. Med det menes at der må eksistere en eller anden form for overordnet identitet på system-niveau, hvis ændring netop er svær fordi dette støder sammen med identiteter (i ubestemt flertal) eksisterende i fagets praksis (typisk lærere og lærebøger). Og det er netop muligheder for ændringer i en sådan identitet der har været motivationen for denne afhandling..

Med ”ændringer” henvises til forandringer i karakteren af stoffets præsentation i undervisningen. Det er altså ikke pensumforandringer som sådan, men bredere ændringer i måden stoffet behandles på, der er tale om. Og med ”mulighed for ændringer” tænkes først og fremmest på muligheden for med samlede indgreb at skabe ændringer. Det vil altså typisk være en ”mulighed” for systemet, en lærebogsforfatter eller en dagsordensætter (f.eks. en forsker), mens der ikke fokuseres på den enkelte undervisers mulighed for at ændre sin praksis (her henvises til Højgaard Jensens afhandling).

Den analytisk beskrivende del var oprindeligt tænkt til at blive bundet sammen med den handlingsorienterede med vendingen ”*hvad betyder dette for*”. Denne kobling vil fortsat blive søgt i diskussionen af afhandlingens resultater, men vil altså ikke blive afrapporteret som et egentligt forskningsresultat.

1.3.2 Opstilling og diskussion af delspørgsmål

Arbejdet med forskningsspørgsmålet er endt op i to mere konkrete delspørgsmål. Det første lyder:

1. *Hvad skal/kan der forstås ved ”en identitet for gymnasiematematikfaget” og hvilke identiteter kan der formuleres fra et analytisk udgangspunkt.*

Begrebet ”identitet” spiller en helt central opgave for afhandlingens både teoretiske, analytiske og empiriske bidrag til matematikdidaktikken. Det er således et selvstændigt aspekt af arbejdet at få afgrænset hvad der mere præcist skal forstås ved dette begreb, samt hvilken relation det har til den øvrige forskningslitteratur.

Med afsæt i begrebsdefinitionen, må der også analytisk opstilles nogle forventninger til hvad man kan forvente at ”finde” i studier af ”virkeligheden”. Det vil sige at der på dette sted i afhandlingen formuleres et sæt af briller som virkeligheden skal ses igennem. Sådanne briller vil naturligvis være meget styrende for hvad der ses.

Min forventning er således, at der findes noget i matematikundervisningens virkelighed, som kan indfanges af begrebet ”identitet”. Og at vi kan se dette noget, ved at anskue virkeligheden med bestemte begreber. Hvordan vi ser det vil dog afhænge af begreberne. Man kan altså ikke fuldstændigt adskille hvad vi ser fra de briller vi ser det med. Og andre briller ville se noget andet.

2. *Hvilke identiteter eksisterer der på følgende tre centrale ”delområder” af gymnasiematematikfaget og hvilken styrke har de hver især på hvert område: A) systemet, B) lærebøgerne og C) underviserne.*

Dette er afhandlingens empiriske del, hvor det opstillede begrebsapparat skal bruges til faktisk at analysere på virkeligheden. Spørgsmålet går altså ud på at identificere ”identiteter” på en række ”delområder”. Der afgrænses i spørgsmålet til tre sådanne delområder:

For det første er det *systemet*, forstået som indholdet af de mekanismer der mest overordnet regulerer hvad der foregår i undervisningens praksis. I Danmark vil dette dække over den regulering der kommer fra det politisk-administrative system.

For det andet er det *lærebøgerne*, forstået som de samlede fremstillinger af matematisk stof til undervisningsbrug, som langt de fleste undervisningspraksisser benytter et enkelt af. I Danmark findes der mange forskellige af sådanne systemer og den enkelte praktiker vælger i princippet selv et.

For det tredje er det *underviserne*, som planlægger og udfører den konkrete undervisningspraksis. Selvom denne ofte reguleres af både systemet og et lærebogssystem, så bliver den daglige praksis alligevel også formet af underviserens eget syn på faget.

Besvarelsen af delspørgsmålet fordrer altså, at der gennemføres analyser af hvilke identiteter der kan findes på hvert af de tre delområder og hvor stærkt de forskellige identiteter er repræsenteret.

Forventningen er altså at besvarelsen af delspørgsmål 1 og 2 til sammen vil udgøre en besvarelse af forskningsspørgsmålet. Sammenføjningen af de to delspørgsmål vil ske i den afsluttende diskussion, hvor der på baggrund af resultaterne endvidere vil blive diskuteret følgende perspektiverende problemstilling, afledt af den udgåede del af forskningsspørgsmålet:

Hvilke forbindelser for gensidig påvirkning er der mellem de tre undersøgte delområder og hvilke af disse vil der oplagt kunne satses på, hvis fagidentiteten ønskes påvirket.

Da undervisningen bliver til i et kompleks af i hvert fald de tre delområder skitseret i delspørgsmål 2, vil forandringsmuligheder i gymnasiematematikfagets fagidentitet netop ske på grundlaf af relationerne mellem disse tre områder. Den perspektiverende diskussion vil altså med afsæt i besvarelsen på forskningsspørgsmålet forsøge analytisk og i begrænset omfang empirisk at optrække nogle handlingsorienterede linjer fra afhandlingens arbejde.

I den diskussion må det være en underliggende antagelse, at det egentlige påvirkningsproblem ligger hos underviserne. Systemet og lærebøgerne kan principielt få andre (dominerende) identiteter ved at lave andre reguleringer eller skrive andre lærebøger, mens et menneske er langt sværere at ændre på. Denne antagelse synes at hente berettigelse i erfaringerne fra historien (jf. afsnit 1.2.2).

1.4 Afhandlingens opbygning

Afhandlingen er bygget op i fire dele, med i alt 9 kapitler. I dette afsnit vil strukturen kort blive gennemgået. Delene strukturerer den følgende opbygning, men indgår ikke i indholdsfortegnelsen.

Del 1 har overskriften ”problem, teori og metode”. Formålet med denne del er at sætte scenen for afhandlingens empiriske arbejde. Del 1 vil derfor i overvejende grad have karakter af at være et teoretisk og analytisk arbejde. Del 1 består af 4 kapitler, hvoraf **kapitel 1** har karakter af at være introducerende til problemstillingen, samt de motivationer der ligger bag arbejdet med denne.

I **kapitel 2** vil afhandlingen blive indplaceret i forhold til den øvrige matematikdidaktiske forskning. Dette vil ske ved at der præsenteres nogle overordnede træk ved forskellige ”grene” af forskning, som holdes op i mod den problemstilling der her arbejdes med. Formålet er at lokalisere hvad den pågældende ”gren” kan bidrage med til afhandlingen, samt hvordan afhandlingen kan bidrage til at udvikle den pågældende ”gren”.

I **kapitel 3** vil delspørgsmål 1 søges besvaret. Det vil sige at kapitlet vil forsøge at putte mening i begrebet ”en fagidentitet for matematik”, samt opstille et sæt af begreber til beskrivelse af hvordan fagidentiteter ”ser ud”. I **kapitel 4** vil der med afsæt i fagidentitets-begrebet blive præsenteret en metodologi for og konkret metode til de empiriske studier af mere praktiske forhold.

Afhandlingens **del 2** vil have overskriften ”Analyse 1: Fagidentiteterne i undervisningens rammer”. Del 2 vil bidrage til at besvare delspørgsmål 2, ved at besvare dette for henholdsvis systemet og lærebøgerne.

Identiteter for systemet vil blive analyseret i **kapitel 5**. Dette vil både have en aktuel og en historisk dimension. Den sidste er med dels for at godtgøre at identiteten udvikler sig over tid, dels for at være et praktisk redskab der kan indgå, når årsager til undervisernes nutidige identitet skal diskuteres. Lærebogssystemerne vil blive analyseret i **kapitel 6**, ligeledes med såvel en historisk som en aktuel vinkel.

Afhandlingens **del 3** vil have overskriften ”Analyse 2: Fagidentiteter blandt underviserne”. Denne del skal besvare det tredje element af delspørgsmål 2, nemlig det der vedrører fagidentiteter hos underviserne. Da dette element tillægges større betydning i forhold til afhandlingens problemstilling, end system og lærebøger, vil analysen få samme omfang som de to foregående til sammen.

Kapitel 7 vil analysere undervisernes mere generelle opfattelser af faget, baseret på forskellige empiriske metoder. Dette skal ses i kontrast til **kapitel 8**, hvor analysen vil fokusere på undervisernes opfattelser af matematik-faglige aktiviteter. Skellet mellem de to ting vil til en vis grad have karakter af en direkte og en indirekte vej til det samme. Kapitel 7 vil således analysere på de typer af svar man få fra undervisere der spørges direkte, mens kapitel 8 vil forsøge at afkode svar ved at analysere reaktioner på konfrontation med situationer og deres potentiale som matematik-faglig aktivitet. Når der tales om ”matematik-faglig aktivitet” er det fordi der snævert tænkes på aktiviteter der skal gennemføres indenfor rammerne af en matematikundervisning, modsat tværfaglige aktiviteter der rummer både matematik og et eller flere andre fag.

Afhandlingens **del 4** vil have overskriften ”Diskussion: Hvilken fagidentitet dominerer og hvordan kan den ændres” og vil indeholde **kapitel 9**. Kapitlet rummer den sammenfattende og perspektiverende diskussion hvor besvarelsen af de to delspørgsmål sammenføjes til en besvarelse af forskningsspørgsmålet, samt hvilke forbehold der må tages for den endelige konklusion. Dertil vil det blive diskuteret i hvilket omfang besvarelsen af forskningsspørgsmålet kan bidrage handlingsrettet til at styrke forsøg på at udvikle og forandre fagidentiteten.

Samlet oversigt over afhandlingens indhold:

Del 1: Problem, teori og metode

1. Introduktion: Forskningsspørgsmål og motivation.
2. Indplacering af afhandlingen i forskningslandskabet
3. Begrebsskelet: Hvordan beskrives en ”fagidentitet for matematik”.
4. Metode: Hvordan analyseres ”fagidentiteter for matematik”.

Del 2: Analyse 1: Fagidentiteterne i undervisningens rammer

5. Analyse: Fagidentiteter hos systemet.
6. Analyse: Fagidentiteter i lærebøgerne.

Del 3: Analyse 2: Fagidentiteter blandt underviserne.

7. Analyse: Fagidentiteter hos undervisere.
8. Analyse: Undervisernes fagidentiteter.

Del 4: Diskussion: Hvilken fagidentitet dominerer og hvordan kan den ændres

9. Diskussion - forbehold - perspektiv.

2 Indplacering i forskningslandskabet

Dette kapitel vil placere det stillede forskningsspørgsmål i det matematikdidaktiske forskningslandskab. Det vil sige at der vil blive afgrænset nogle områder af dette landskab, indenfor hvilke relationen mellem eksisterende litteratur og dette projekt diskuteres. Der vil være tale om tre typer af relationer. Punkter hvor den eksisterende litteratur influerer på afhandlingen, punkter hvor afhandlingen forventes at kunne bidrage til området og punkter hvor der trods umiddelbar lighed, alligevel ikke er nogen egentlig kontakt.

Det samlede matematikdidaktiske felt er enormt og beskæftiger sig med mange forskellige aspekter af det at undervise i og at lære matematik. En afhandling har således kun berøring med et ganske begrænset antal aspekter af det samlede felt. I Niss (2007, s. 1310) opstilles ud fra en utopi om en fuldt udbygget teori for matematikundervisning, fem overskrifter for delteorier, som en sådan teori må indeholde:

1. En del-teori for *matematik som disciplin og fag*, herunder dets natur, rolle og opgave i samfund og kultur.
2. En del-teori for *individer og gruppers affektive opfattelser* med hensyn til deres faktiske og potentielle omgang med matematik og udkommet af denne.
3. En del-teori for *individer og gruppers kognitive opfattelser* med hensyn til deres faktiske og potentielle omgang med matematik og udkommet af denne.
4. En del-teori for *matematikundervisning*, i forhold til dets forskellige institutionelle, samfundsmæssige, nationale, internationale, kulturelle og historiske kontekster.
5. En del-teori for *matematikundervisere*, som individer og kollektiver, herunder deres personlige og uddannelsesmæssige baggrund og professionelle identitet og udvikling.

En afhandling kan således tænkes indplaceret, ved at forholde sig til hvilke af disse potentielle delteorier den bidrager til at udvikle. Denne afhandling er først og fremmest inden for del-teori 1, i det den søger at opstille et begrebsapparat der beskriver faget som sådan. Derfor vil indplaceringen omhandle begrebsapparater der søger at beskrive matematikfaget som helhed, eller helhedsbeskrive veldefinerede aspekter af matematik som fag.

Afhandlingen har endvidere et sigte mod at bidrage til udvikling inden for delteori 4 og 5. Det har den i kraft af det som det opstillede begrebsapparat forventes at kunne bruges til. Afhandlingen sigter delvist mod delteori 4, fordi det opstillede begrebsapparat kan bruges til at undersøge og diskutere de påvirkninger af fagets karaktertræk der kommer fra institutionelle regler. Afhandlingen kan altså potentielt bidrage til forskning vedrørende f.eks. curriculum, lærebøger og fagkonstituering mere generelt. Dette vil dog ikke blive berørt i dette kapitel.

Afhandlingen vil endvidere kunne bidrage til udviklingen af delteori 5 i forhold til at beskrive og diskutere underviseres rolle. Dels deres affektive holdninger til faget, dels deres rolle som fagpersoner i matematikundervisning som en institutionel og kollektiv praksis.

Afhandlingen vil ikke berøre del-teori 3 og 4. Det er en bevidst afgrænsning af dette arbejde, at det ikke forholder sig til spørgsmål om *læring* og *lærende*. Afhandlingen her beskæftiger sig med spørgsmål der går forud for læring. Det vil sige spørgsmål om karakteren af det der skal læres. Derfor vil der ikke i indplaceringen i forskningslandskabet indgå overvejelser af læringsteoretisk art.

2.1 Helhedsbeskrivelser af matematik

Der kan gøres mange forsøg på at beskrive matematik som en helhed. Et kunne være at opliste faget som en række af ikke-disjunkte discipliner (aritmetik, algebra, geometri, analyse, statistik- og sandsynlighedsregning, mv.), som i forening udgør faget. Andre kan være at beskrive de objekter der behandles af faget, fagets ”natur” eller de handlinger der hører faget til. Fælles for sådanne beskrivelser er, at de på en og samme tid forsøger at sige noget om hvad der kendetegner det, som er samlet under overskriften ”matematik”.

Begrebet ”fagidentitet for matematikfaget” hører til denne klasse af helhedsbeskrivelser af faget. Det er således dette afsnits formål at skabe grobund for at relatere denne beskrivelse til de andre typer. Konkret vil det ske ved at relatere til litteraturen omkring matematikkens grundlag, matematikkens natur og matematik som ”kompetence”. Særligt de to sidste foci vurderes at være centrale.

2.1.1 Matematikkens filosofi

Matematikkens filosofi beskæftiger sig i hovedsagen med fagets *ontologi*, dvs. i hvilken forstand man kan tillægge det faget undersøger eksistens, samt dets *epistemologi*, dvs. hvordan faget opnår erkendelse om det der undersøges. I det følgende vil jeg mest koncentrere mig om ontologien.

Overordnet set kan matematikfilosofien deles i to retninger. *Platonisme* dækkende synspunktet at matematiske objekter eksisterer uafhængigt af tid, rum og erkendelse. Disse objekter beskrives af matematisk teori. Og *anti-platonisme* som siger at sådanne objekter ikke eksisterer, hvorfor matematisk teori må fortolkes på anden vis (Balaguer 1998).

Platonisme deler sig i en *objekt-platonisme* som hævder eksistens af abstrakte objekter som f.eks. tallet 3, uafhængigt af andre objekter. Og i en *strukturalisme*, som hævder den objektive eksistens af abstrakte strukturer, men kun tillægger ”objekter” som tallet 3 mening i kraft af dettes relation til andre objekter. Et objekt er altså en plads i en struktur, uden selvstændigt indhold (Shapiro 1997).

Anti-platonisme kan ligeledes opdeles i to væsensforskellige lejre. For det første *realister*, som anser matematiske objekter for at være enten fysiske eller mentale (dvs. eksisterende afhængigt af den fysiske verden eller individets bevidsthed). Hersh (1997) angiver en tredje *realistisk* position, *humanisme*, hvor matematiske objekter opfattes som *sociale*. Det vil sige eksisterende afhængigt af menneskeheden og dens samfund og kulturer, men uafhængigt af det enkelte individs bevidsthed.

For det andet *anti-realister*, som mener at matematikken udtaler sig om abstrakte objekter, men at sådanne objekter ikke eksisterer (altså matematik som ”ord uden indhold”). Eksempelvis *nominalisme* (Burgen&Rosen 1997) og *fiktionalisme* (Balaguer 2009).

I Ernest (1985) søges forskellige klassiske retninger i matematikkens filosofi koblet med forskellige retninger indenfor undervisning. Eksempelvis ses formalisme (anti-realistisk retning) overfor platonisme afspejlet i en konflikt mellem instrumentel og relationel forståelse (Skemp 1976) og platonisme overfor konstruktivisme (anti-platonisk retning) mellem fokus på objekt og proces. Ernest peger på *fallibilisme* (relateret til *humanisme*), som bedste afsæt for undervisning. En væsentlig pointe er dog, at han samtidigt siger at matematikkens filosofi synes at have meget lille indflydelse på matematikundervisere. Denne påstand lyder rigtig, men savner umiddelbart empirisk belæg.

2.1.2 Matematikkens natur

Matematikkens filosofi er en selvstændig disciplin, med egne tidsskrifter. Her søges svar på hvad der karakteriserer matematikkens objekter og erkendelse. Som påpeget af Ernest, har dette dog kun begrænset berøring med didaktikken. I den didaktiske litteratur støder man derimod på det mindre veldefinerede begreb *matematikkens natur*, som vil være genstand for dette afsnit. Begrebet optræder på mindst to måder i litteraturen. Dels ved forsøg på faktisk at beskrive hvad der er matematikfagets *natur*, dels ved forsøg på at beskrive matematikfagpersoners forestilling om denne.

Forsøg på at beskrive fagets natur kan naturligvis ske uafhængigt af dets didaktik. Denne litteratur vil ikke være i fokus her. I den didaktiske litteratur kan man finde den måske simpleste beskrivelse hos Hansen (2008a), som siger at matematikken har en ”dual natur”, udspændt af en symbiose mellem ”beskrivelser af konkrete fænomener i den reale verden” og ”abstrakte matematiske ideer til at forklare og forstå disse med”.

Semadeni (2008) nævner også ren-anvendt-dikotomien, samt andre dikotomier (teori vs. redskab og evig viden vs. menneskelig aktivitet). Der foreslås dog i stedet en tre-foldig natur bestående af komponenterne *grundlæggende ideer*, *overfladerepræsentationer* og *formelle modeller*[2]. De to første spiller på sin vis samme rolle som semantik og syntaks i lingvistik. Overfladerepræsentationer er tegn eller symboler, som repræsenterer matematiske objekter. Grundlæggende ideer er veldannede abstrakte ideer om objekters mening, egenskaber, formål og relationer til andre objekter. Disse kan være individuelle, eller have et fast intersubjektivt indhold. En formel model af et matematisk objekt, er således noget i en aksiomatisk teori som modsvarer objektet. De tre begreber lokaliseres som ”matematikkens tre-foldige natur” i 16 konkrete eksempler.

Niss (1994) peger på at matematik som fag konstitueres af en fem-foldig natur i form af fem arenaer hvor fagets praksis udfoldes: En *ren videnskab*, en *anvendt videnskab*, et *system af instrumenter* til at assistere beslutninger og handlinger i samfund og kultur, et *æstetisk felt* og et *undervisningsfag*.

Og endeligt siger Ernest (1992) ud fra et socialkonstruktivistisk synspunkt, at matematikkens natur til enhver tid konstitueres af tre difuse mængder (’fuzzy sets’): En mængde af informationsteknologiske artefakter, en mængde af personer (matematikere) og en mængde af sproglige regler godtaget og brugt af matematikerne.

[2] ”deep ideas, surface representations, formal models”

I den anden betydning af ”matematikkens natur” ligger fokus på at beskrive opfattelser af faget hos mennesker, typisk undervisere. I oversigtsartiklen *The nature of mathematics: Its role and its influence* (Dossey 1992) bliver pointen at underviseres *forståelse* (’conception’) af matematikkens natur er altafgørende for deres måde at undervise på. Artiklen har en gennemgang af forskellige bud på beskrivelser af fagets natur, hentet fra matematikkens filosofi. Men i hovedsagen er ”matematikkens natur” noget der eksisterer forestillinger om, snarere end noget i sig selv eksisterende.

En inspiration til denne brug er Ernest (1989), som knytter sig til begrebet *forestilling* (’belief’). Ernest beskriver »syn på eller forståelse af matematikkens natur« som én af tre nøglekomponenter for en undervisers forestillinger om matematikundervisning. Der er ikke nødvendigvis tale om en fuldt udviklet eller bevidst forståelse. Ernest identificerer tre grundforståelser. En *instrumentalistisk* (samling af fakta, regler, færdigheder, mv.), en *platonistisk* (en statisk helhed af viden) og en *problemløsende* (dynamisk, menneskeskabt, undersøgende proces).

Til empirisk undersøgelse har Ernest begreb været anvendt af bl.a. Raymond (1997) og Beswick (2012). Raymond lader således forestillinger om matematikkens natur beskrive ved indplacering på fem akser udspændt af dikotomierne 1) dynamisk-fikseret, 2) forudsigelig-overraskende, 3) absolut-relativ, 4) usikker-sikker og 5) anvendelig-æstetisk. Beswick bruger i stedet de tre grundforståelser til at beskrive dels forestillinger om matematikkens natur generelt, dels om skolematematikkens natur. Dermed dannes logisk ni positioner en underviser kan indtage.

2.1.3 Matematik som proces

Hvor filosofien søger at beskriver karakteren af matematikkens objekter og matematikkens natur og dens karakteristika som fag, så er der også den mulighed at beskrive faget som omfattende bestemte typer af handlinger. Altså et fokus på matematik som *proces*

Et eksempel på et forsøg på at beskrive matematik som helhed med dette afsæt, er begrebet *matematisk kompetence* som fremstillet i KOM-rapporten (Niss & Jensen 2002). Matematisk kompetence beskrives her som udspundet af *matematiske kompetencer*. Med *kompetence* forstås ”indsigtsfuld handleparathed” og med navngivningen af kompetencen henvises til bestemte former for handleparathed. Matematisk kompetence er således handleparathed i bestemte matematiske situationer.

Valget af de udspændende kompetencer er et pragmatisk valg. KOM-rapporten formulerer otte kompetencer, som falder i grupper af fire. Den første gruppe kaldes ”at spørge og svare i, med og om matematik”. Det drejer sig om 1) tankegangskompetence, 2) problembehandlingskompetence, 3) modelleringskompetence og 4) ræsonnementskompetence. Den anden gruppe kaldes ”at omgås sprog og redskaber i matematik” og rummer 5) repræsentationskompetence, 6) symbol- og formalismekompetence, 7) kommunikationskompetence og 8) hjælpemiddelkompetence.

Et menneskes besiddelse af en kompetence kan beskrives ved tre dimensioner, som kaldes *dækningsgrad*, *aktionsradius* og *teknisk niveau*. Endvidere supplerer rapporten de otte kompetencer med tre former for ”overblik og dømmekraft”. Det er a) ”matematikkens anvendelse”, b) ”matematikkens historiske udvikling” og c) ”matematikkens karakter som fagområde”.

KOM-rapporten er ikke i sig selv tænkt som et forskningsarbejde, men er brugt som begrebsramme i både analytisk og empirisk forskning (se f.eks. Blomhøj & Jensen 2006; Michelsen & Iversen 2009; Højgaard 2009; Højgaard et.al. 2010)

Nogle projekter har fokus på en eller få udvalgte ”kompetencer”. Eksempelvis modelleringskompetence i kombination med problemløsningskompetence (Jensen 2009) eller repræsentationskompetence (Michelsen 2006). Også ræsonnementskompetence (Lindhardt 2010) og kommunikationskompetence (Johansen 2007) har været selvstændigt og eksplicit berørt i empirisk forskning. Ligeledes har de tre former for ”overblik og dømmekraft” været anvendt empirisk (Jankvist 2010).

I samme stil som KOM-rapporten findes “*Adding It Up – Helping Children Learn Mathematics*” (Kilpatrick et.al. 2001). Her beskrives *matematisk kyndighed* (‘mathematical proficiency’), som et sammenvæv af fem tråde (’strands’). Disse fem tråde er 1) begrebsforståelse (’conceptual understanding’´), 2) procedurebeherskelse (’procedural fluency’), 3) strategikompetence (’strategic competence’), 4) fleksibel ræsonneren (’adaptive reasoning’) og 5) produktiv indstilling (’productive disposition’). Centralt er det, at matematisk kyndighed kun har mening som en kompleks sammenvævning af disse fem tråde. Isoleret har disse kun begrænset værdi.

Hvor kompetence-begrebet i KOM-rapporten sigter mod at beskrive matematisk handleparathed generelt – det vil sige uanset situation, uddannelsesniveau, stofområde, mv. – har ”Adding It Up” i højere grad et rent fokus på uddannelse af børn og unge.

2.1.4 Indplacering i forhold til ”helhedsbeskrivelser af matematik”

Denne afhandling søger at undersøge betydningen af sammenstød mellem ”forskellige varianter af faget matematik” i en given undervisningsramme. For at begribe sådanne varianter og udpege deres forskelle, er det nødvendigt at beskæftige sig med helhedsbeskrivelser af faget. Matematikkens filosofi søger at beskrive forskellige opfattelser af fagets objekter samt menneskets adgang til erkendelser om disse. Det synes ikke ud fra forskningslitteraturen at være sådanne filosofiske uenigheder der konstituerer konflikter om fagets indretning og opgaver.

Diskussioner om fagets *natur* synes derimod at være tættere knyttet til det undersøgte. I første omgang indikerer det behovet for en begrebsmæssig distinktion mellem ”natur” og ”identitet” (se kapitel 3). Her vil særligt forsøgene på at kortlægge en ”natur” for faget være centrale at være i berøring med. Afhandlingen vil der kunne bidrage til en præcision af begrebet ”matematikkens natur”.

Diskussionerne om betydningen af læreres divergerende forståelser og forestillinger om fagets natur påkalder ligeledes behov for en distinktion mellem en ”forståelse”/”forestilling” og en ”identitet” (se kapitel 3). Samtidigt kan begrebsapparatet fra disse undersøgelser bidrage til at udfolde identitetsbegrebet nærmere. Afhandlingen vil i den forbindelse også give forslag til nye analytiske begreber for sådan empirisk forskning.

De to proces-fokuserede helhedsbeskrivelser vil ligeledes kunne bidrage til at udfolde identitetsbegrebet. Denne afhandling vil især have interesse for procesbeskrivelser ved forhåbentligt at kunne kortlægge forskellige typer vanskeligheder ved at lade disse styre tilrettelæggelsen af undervisning.

2.2 Helhedsbeskrivelser af matematikelementer

Hvor forrige afsnit fokuserede på begrebsapparater der søger at beskrive matematik i sin helhed, vil dette fokusere på begrebsapparater der søger at beskrive elementer af matematikken i deres helhed. De udvalgte elementer vil være: 1) Anvendelse/modellering, 2) Opgavetyper, 3) Meta-problemstillinger, 4) tværfaglige relationer og 5) 'ren matematik'.

Et element er altså et velafgrænset fokusområde. Elementerne er oplagt ikke disjunkte og foreningen af dem udgør ikke matematik i sin helhed. Det der kendetegner arbejdet med dem her er, at de repræsenterer nogle nedslag i komponenter af faget, som er vurderet til at være beskrivende og konstituerende for hvordan faget fremstilles i en konkret situation.

Udvalget af litteratur vil som hovedregel være afgrænset til et nordisk fokus, med tilføjelser af særlig relevans for et konkret element. Der er to væsentlige grunde til afgrænsningen til den nordiske forskningslitteratur. For det første er undervisningssystemer og –kulturer stærkt varierende udover verden, med tilsvarende variationer i forskningsfokus. Da denne afhandling har særlig interesse for Danmark, er det oplagt at afgrænse til de systemer og kulturer der ligner. For det andet er det et pragmatisk valg, for at undgå en uoverskueligt stor stofmængde.

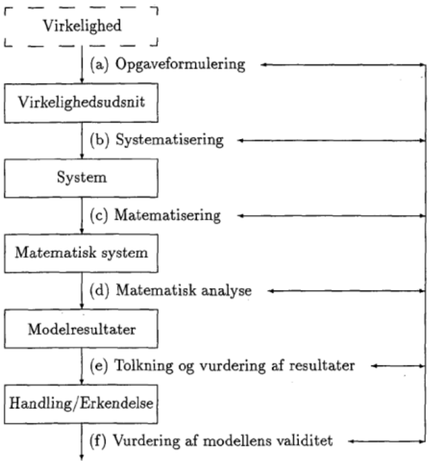
2.2.1 Anvendelse og modellering

Den danske forskningstradition indenfor anvendelse og modellering falder i to grupper. Den første med fokus på formulering af begreber til beskrivelse af fænomenet, den anden med fokus på en kritisk refleksion over dets rolle i samfund og undervisning.

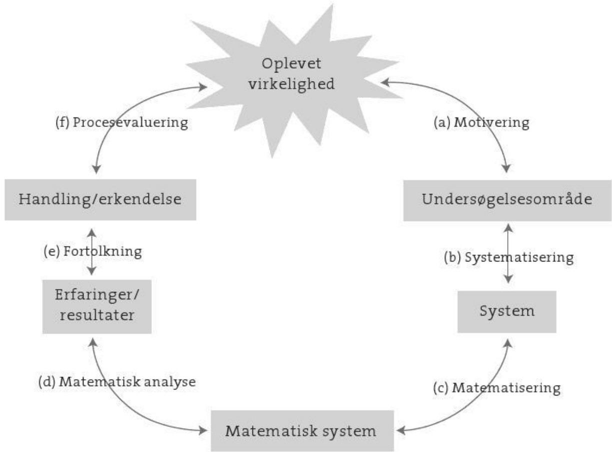
Traditionen i den første gruppe strækker sig i hvert fald tilbage til Niss (1989). Her defineres *anvendelse* som enhver behandling af et ekstra-matematisk område med begreber, metoder, resultater, emner eller teorier fra matematikken. Den ækvivalente, men "omvendte" definition, at anvendelse er en matematisk aktivitet hvor i der indgår referencer til ekstra-matematiske objekter findes også (Jensen 2012). I begge tilfælde refereres ofte til det ekstra-matematiske som aktivitetens *kontekst.*

Enhver anvendelse vil ifølge Niss (1989) involvere en *matematisk model*. En matematisk model defineres som en trippel (A,M,f), hvor A er et ekstramatematisk domæne, M et matematisk domæne og f en afbildning mellem de to. Som konkurrerende brug af ordet, kan dette refererer alene til objektet M. Forskellen er altså om en model nødvendigvis er model af noget konkret, eller blot en struktur der potentielt kan være det. Trippel-definitionen findes i litteraturen (f.eks. Jensen 2007).

Niss (1989) definerer endvidere *modellering* som processen der konstruerer en konkret model. Processen beskrives ved 10 distinkte delprocesser. I Blomhøj (1992) opstilles begrebsapparatet anderledes. Her beskrives processen med 6 faser, bundet sammen af 6 processer. En lettere modificeret variant af denne findes i Gregersen & Jensen (1998), se figur 2.1. Samme model er brugt til udvikling af undervisning i Blomhøj et al. (2001) og Jensen (2007). Det sidste udviklingstræk er omdannelsen af den "lineære" fremstilling til en "cirkulær" (se figur 2.2). Det sker bl.a. i Blomhøj (2004). Piktografisk skiftes fra fokus på delprocessernes sammenvævethed til processens iterative karakter.



Figur 2.1: Model af modelleringsproces fra Gregersen & Jensen (1998).



Figur 2.2: Modelleringscirklen fra Blomhøj (2006).

Hvor ovenstående handler om at beskrive sagens *objektive* side, findes en parallel begrebsudvikling for en *subjektiv* side i form af begrebet (*matematisk*) *modelleringskompetence*. Modelleringskompetence indgår som en matematisk kompetence i KOM-rapporten (se afsnit 2.1.3). Ofte udfoldes den i en række underkompetencer, som følger faserne i en eller flere af modellerne over modelleringsprocessen (f.eks. Hansen, et al. (1996), Blomhøj & Jensen (2003, 2006), Jensen (2009), Niss (2010)).

Med undtagelse af Jensen (2007), se afsnit 1.2.1, så synes den nyere empiriske forskning i modellering og anvendelse i Danmark at være fokuseret på afrapportering af erfaringer med undervisning tilrettelagt efter ovennævnte begreber. Dels fra projektarbejdet og modelleringskurset BASE på Roskilde Universitets naturvidenskabelige basisuddannelse (se f.eks. Blomhøj & Jensen (2003), Blomhøj & Kjeldsen (2006, 2007)), dels fra studier af grund- og gymnasieskolen (se f.eks. Blomhøj 2004, Andresen 2005).

Hvor den danske tradition har fokus på produkt, proces og kompetence, synes den svenske tradition at have fokus på karakteren af anvendte opgaver i undervisning og evaluering/bedømmelse. Dette kommer til udtryk i Palm (2002, 2009), hvor der præsenteres en begrebsramme for analyse af ”autentiske opgave-situationer” (’authentic task situations’). Begrebsrammen tager afsæt i at beskrive graden af overensstemmelse mellem ”tekstopgaver” (’word problems’) og ”virkeligheds opgaver” (’real world tasks situations’), i det førstnævnte siges at *simulere* sidstnævnte.

Beskrivelsen opstiller 16 aspekter af virkelighedssituationer, som det kan vurderes om et tekstproblem simulerer. Autenticiteten af opgaven er dermed spændt ud af opgavens *rækkevidde* (’comprehensiveness’), dvs. hvor mange aspekter den simulerer, og dens *nøjagtighed* (’fidelity’), dvs. i hvilken grad opgaven afspejler aspektet i den simulerede situation. Samlet set tales om *repræsentativitet* (’representativeness’), som et kombineret mål af rækkevidde og nøjagtighed. Palm har afprøvet begrebet til analyse af autenticitet i eksamensopgaver og læringsudbytte (Palm 2004, 2008).

Beskrivelse af forskellige typer af opgaver og opgavekontekster findes også hos andre i den svenske forskning. Dels findes en række studier hvor den beskrivende analyse foretages på modelleringsopgaver i sig selv (Lingefjärd 2006; Ärlebäck 2009a; Frejd 2011), på modelleringsopgaver i forhold til planlægning og afvikling af undervisning (Lingefjärd 2005, 2011; Ärlebäck 2009b) og i forhold til forestillinger om og forståelse af matematisk modellering hos elever/studerende (Frejd&Ärlebäck 2011) og hos undervisere (Ärlebäck 2009c; Frejd 2012).

Den danske og svenske tradition kan meget generaliseret siges at adskille sig ved at den danske er *normativ*, i det den søger at beskrive hvad der menes med model, modellering og modelleringskompetence, mens den svenske er *deskriptiv*, i det den søger at beskrive hvad der faktisk udfolder sig i opgaver, undervisning og blandt undervisningsfagets aktører. Dertil kommer en ganske omfattende litteratur globalt set om emnet (se fx. Kaiser&Sriraman 2006; Ferri 2006; Lesh&Zawojewski 2007).

2.2.2 Opgavetyper

I den danske litteratur synes der især at være to dikotomier der udspænder forskellige opgavetyper. Dels *ren-anvendt*, dels *øvelse-problem*. Den første er behandlet i afsnit 2.2.1. Den anden defineres typisk sådan, at *opgave* er et objektivt begreb der beskriver en situation hvor en eller flere opgavestillere formulerer et mere eller mindre eksplicit opdrag til en eller flere opgaveløsere. Mængden af opgaver kan derpå inddeles relativt efter den enkelte opgaveløser, afhængigt af om opgaven for vedkommende udgør et *problem* der kræver en dybere undersøgelse eller en *øvelse*, der kan løses ved aktivering af rutine-operationer (Blum & Niss 1991; Gregersen & Jensen 1998, Jensen 2009)

Et forsøg på at indramme ”øvelse-problem”-feltet med objektive begreber, er dikotomien *åben-lukket*, som den bl.a. præsenteres i Christiansen (2003). Her betyder ”lukket” at der eksisterer en helt konkret forventning til opgaveløseren, mens ”åben” betyder at forventningen kan rummes inden for et spektrum af handlinger. Som nuancering kan der skelnes mellem opgaver der har åbne hhv. lukkede spørgsmål og svar (altså i alt 4 typer at åben-lukkethed).

Afgrænsningen af begrebet ”problem” giver i litteraturen anledning til snak om *problembehandlingskompetence* (Niss & Jensen 2002, s. 49f) eller *problemløsningskompetence* (Jensen 2009). Ofte refereres der til Schoenfeld (1985), hvor løsning af matematisk problemløsning beskrives ved fire delkomponenter: 1) Ressourcer, 2) heuristik, 3) kontrol og 4) forestillinger. Disse delkomponenter synes dog ikke at spille nogen væsentlig rolle i den danske litteratur.

I nyeste tid synes det engelske begreb *inquiry* at have stor indflydelse på udviklingen i den danske forskning, med afsæt i en række praksisorienterede EU-finansierede programmer (i Danmark særligt PRIMAS). Begrebet stammer fra en løs brug i naturfagenes ”*inquiry based science education”* (IBSE), men er med ”IBME” og ”IBSME” blevet udvidet til og med matematik (Michelsen 2011). Begrebet bliver nu behandlet mere systematisk (Artigue&Blomhøj 2013) og minder om det ældre danske begreb *undersøgelseslandskaber* (Skovsmose 1999, 2001). Begge sigter mod at erstatte traditionelt øvelsesstof med mere inddragende, aktiverende og reflekterende arbejdsformer.

I den svenske litteratur findes begrebsapparater som i højere grad har til formål at analysere praksis. Hos Lithner (2003) finder man således en model over fire trin i elever/studerendes ræsonneren i mødet med et problem: 1) En *problematisk* situation, hvor det ikke er oplagt hvordan man skal fortsætte. 2) *Strategivalg*. 3) *Strategiimplementation*. 4) *Konklusion*. Denne ræsonnementsstruktur finder Lithner i to varianter. *Plausibel ræsonneren* (PR) hvis argumentationen er baseret på indre matematiske egenskaber ved ræsonnementets komponenter og *etableret erfaring* (EE) baseret på begreber og procedurer etableret i individets tidligere erfaring fra læringsmiljøet.

Begrebsapparatet kan således bruges empirisk til at studere ræsonnementsmønstre hos elever/studerende (Lithner 2000a, 2000b), samt til kvalitativt og kvantitativt at beskrive hvilke typer ræsonnement der inviteres til i opgaver i lærebøger (Lithner 2004). I sidstnævnte analyse benyttes begrebet *identifikation af similaritet* (IS) om valg af strategi der tager afsæt i overfladiske lighedspunkter med situationer beskrevet tidligere i teksten. Endvidere opereres med *lokal*- og *global* plausibel ræsonneren (LPR hhv. GPR). I en calculus-bog analyseres 598 opgaver ud fra de tre kategorier IS, LPR og GPR, som fylder hhv. 85%, 8% og 7%.

Endeligt kan fra den norske tradition nævnes begrebet *opgavediskursen*, som behandler selve opsætningen omkring opgaver i især skolematematikken. Her peges særligt på brugen af rejsemetaforer i lærernes tale om opgaver og organisering af undervisning som et ”ræs”, hvor der forventes løst et antal opgaver i en bestemt rækkefølge (Mellin-Olsen 1990, 1996; Niss 2007a). Opgavetyper er naturligvis behandlet ganske omfattende i den ikke-skandinaviske litteratur (se f.eks. Lesh & Zawojewski 2007), bl.a. ud fra dikotomien ”basic skills vs. problem solving”.

2.2.3 Meta-problemstillinger

En egenskab ved matematikundervisning som deles med få andre fag, er brugen af *meta-problemstillinger*. Det vil sige at man som en del af undervisningen i faget kan inddrage refleksioner over faget, som i sagens natur ofte har med andre fags anskuelsesmåder at gøre. Almindeligst er matematikkens historie, men også dens filosofi, sociologi, psykologi, didaktik, mv. kan indgå.

Et dilemma i arbejde med sådanne problemstillinger er afvejninger af hensynet til indlæringen af det belyste matematiske stof overfor loyalitet mod det belysende fags metode. F.eks. en historie*faglig* belysning af matematikkens historie overfor en ”wiggish”-historisk tilgang, hvor det belyste anskues fra et moderne synspunkt, som typisk er det der skal læres (Fried 2001).

I den danske litteratur beskrives dilemmaet i forhold til det historiske, med begreberne *værktøj* for overfor *mål* med undervisning i matematik. En dansk analyse af den internationale litteratur, der har matematikhistorie som *mål*, har overordnet fundet tre tilgange: En *illustrationstilgang* spændende fra ”undervisningskrydderi” til ”epiloger”, en *modultilgang* spændende fra ”enkeltmoduler” til ”matematikhistoriekurser” og endeligt en *historiebaseret tilgang*, hvor undervisningen tilrettelægges efter fagets historiske udvikling (Jankvist 2007, 2009). I litteraturen fremhæves et historieperspektiv også som muligt *værktøj* for at lære meta-diskursive regler i matematik (Kjeldsen&Blomhøj 2012).

I den danske litteratur findes endvidere en række analytiske og empiriske studier over brugen af matematikhistorie i matematikundervisning (Jankvist 2008, 2010; Petersen 2011; Kjeldsen & Blomhøj 2009). Det har ikke været muligt for mig at lokalisere begrebsdannende litteratur fra det øvrige Skandinavien om brug af meta-problemstillinger. Jeg oplever i øvrigt at den internationale litteratur generelt set følger den danske tendens til især at fokusere på de historiske vinkler.

2.2.4 Tværfaglige relationer

Arbejde med anvendelse/modellering, med meta-problemstillinger og i et vidst omfang problemløsning, får ofte en tværfaglig karakter, fordi det involverer problemstillinger og/eller metoder fra andre fag. Aktiviteterne er ofte organiseret inden for rammerne af en isoleret matematikundervisning. De tværfaglige relationer der fokuseres på begrebsbeskrivelse af her, omhandler matematikholdige undervisningsaktiviteter som organiseres under hensyntagen til lærere og læreplaner fra andre fag.

Tværfaglighed er et ganske omdiskuteret begreb. Jensen (2008) afgrænser to måder at bruge det på i den danske litteratur. Dels en *organisatorisk tværfaglighed*, hvor elementer af eksisterende (grund)fag integreres i nye faglige konstruktioner. F.eks. som *specialisering* eller *anvendelsesorientering* hos Jensen (1991). Dels en *funktionel tværfaglighed*, der beskriver konkrete samarbejdsrelationer mellem selvstændige fag, styret af en konkret omstændighed. Begrebsbrugen stammer fra Jantsch (1972), hvor den bruges normativt til at beskrive et tværdisciplinært universitet. Men på dansk er den oversat til mere deskriptiv brug i Ulrichsen (2001).

Med afsæt i *funktionel tværfaglighed* udvikler Jensen (2008, 2010a, 2010b) et begrebsdannelsesprogram for matematik og tværfaglighed. Dels generelle begreber for samarbejde mellem vilkårlige fag, dels begreber for samarbejder mellem matematik og vilkårlige andre fag og dels begreber for specifikke relationer. Sidstnævnte gøres i forhold til relationer mellem fagene matematik og historie. Begreberne varierer altså efter en faglig kontekst. Men også efter en institutionel, hvor der udvikles både generelle begreber og begreber særligt passende til fagrelationer i gymnasieskolen.

I Michelsen & Iversen (2009) opstilles et andet program som efterspørger en *konceptuel ramme* og en *didaktisk model* for samspil mellem matematik og andre fag. En konceptuel ramme søges skabt ved at udpege et antal af KOM-rapportens (se afsnit 2.1.3) kompetencer som *fagoverskridende* og derfor tværfaglige. Til at bygge en didaktisk model anvendes begreberne *horisontal* og *vertikal matematisering* fra Freudentahls ”Realistisc Mathematics Education”-tradition. I Jankvist (2011) har endvidere været foreslået et tredje program omkring begrebet *forankring* (’anchoring’).

I følge Blum & Niss (1991) kan der på det tidspunkt ikke identificeres noget klart centrum for udvikling af relationerne mellem matematik og andre fag, selvom dette har været på dagsordenen ved de første seks ICME-konferencer. Det nævnes at Danmark og Holland dog har en særlig position, specielt på gymnasieniveau. Michelsen (2005) peger på samme mangel. Der er dog en del danske bidrag ved de første tre konferencer i ”Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences” (MACAS). Tre i 2005, seks i 2007 og to i 2009. Gymnasiereformen af 2005 forøger mulighederne for studier af fagligt samarbejde involverende matematik (Andresen & Lindenskov 2009).

Der er i Danmark udarbejdet specialer og afhandlinger med empiriske studier af matematiks deltagelse i tværfaglige samspil, typisk koncentreret om en bestemt fagkombination. Michelsen (2001), Eriksen & Jensen (2006) og Hansen (2009a) fokuserer således på samspil med fysik. Christensen

(2008), Jensen (2008) og Hansen (2009) fokuserer på samspil med historie. Antonsen (2009) og Videnkjær (2012) fokuserer på samspil med samfundsfag. Iversen (2006) på samspil med filosofi. Og Jankvist et al. (2011a) på modellering og tværfaglighed blandt kommende gymnasielærere.

2.2.5 'Ren' matematik

Dikotomien ”ren-anvendt” benyttes oftest i forskning der undersøger hvordan anvendelse af matematik kan spille en rolle i en undervisning, som i øvrigt er præget af ”ren matematik”. Det fører til en række begrebsafklaringer (se afsnit 2.2.1), som har til formål at beskrive hvad anvendelser kan eller bør være, samt måle i hvilket omfang det finder sted. Der synes imidlertid ikke at være et tilsvarende begrebsapparat knyttet til ”ren matematik”, eller en litteratur der særligt studerer dennes rolle og berettigelse, eller om dens forhold til ”anvendt matematik”.

”Ren matematik” indgår således snarere som et underforstået og uartikuleret fænomen i hovedparten af forskningen. Det kan f.eks. være ved opdeling i klassiske matematiske emner som aritmetik, algebra, geometri, sandsynlighedsregning og statistik (se f.eks. Lester 2007, kapitlerne 13, 14, 15, 16, 19, 20 og 21). Der findes dog også en litteratur der dyrker elementer typisk relateret til ”ren matematik”, som går på tværs af emner. Udover problemløsning (se afsnit 2.2.2), synes dette især at være ”*matematiske begreber*” og ”*beviser og bevisgang*”.

Mit indtryk er, at brugen af begreberne ”matematisk begreb” og ”bevis/bevisgang” oftest sker med en implicit antagelse om at der blandt matematikkyndige findes en fælles forforståelse af begreberne. Der synes derfor ikke at være det store behov for at artikulere begrebernes indhold nærmere. I den danske/skandinaviske litteratur synes der ikke at være det store fokus på dette. I den internationale litteratur findes en begrebsdannelse for ”matematiske begreber” bl.a. i Vinner (1991), Sfard (1991) og Vergnaud (1997), samt for beviser/bevisgang i Harel & Sowder (1998).

2.2.6 Indplacering i forhold til ”helhedsbeskrivelser af matematikelementer”

Denne afhandlings naturlige berøring med *helhedsbeskrivelser af matematikelementer* kommer især til udtryk i ønsket om at kunne nuancere beskrivelsen af ”forskellige varianter af faget”. Netop forskellige tilgange til og afvejninger af de forskellige elementer i faget, udgør en kilde til at faget kan fremtræde forskelligt fra situation til situation.

Den eksisterende litteratur for begrebsdannelser er således en væsentlig inspirationskilde til at danne et samlet begrebsapparat til at beskrive forskellene på forskellige varianter af matematikfagets identitet. Den konkrete brug af dette vil blive udfoldet i kapitel 3.

Samtidigt tjener disse begrebsdannelser også et metodisk formål, i det individers afvejning af et eller flere elementers betydning kan være en vigtig indikator for deres syn på faget. Et særligt potentiale for dette forventes tværfaglige konstellationer at have, fordi fagets repræsentanter i sådanne samspil tvinges til at afgøre hvad der repræsenterer faget og hvad der ikke gør.

Afhandlingens bidrag til udviklingen af sådanne begrebsdannelser er bl.a. at skabe en begrebsramme hvor i de kan ses i en helhed. Altså en ramme der kan kæde begrebsdannelser for anvendelse, opgavetyper, meta-problemstillinger, tværfaglighed og ren matematik sammen i ét samlet begrebsapparat, som gør det muligt at inddrage flere, potentielt alle, elementerne på én gang.

2.3 Indplacering i forskningslandsskabet

Som beskrevet i afsnit 2.1 og 2.2 sigter afhandlingen altså primært på at bidrage til udviklingen af det der indledningsvist blev kaldt ”delteori 1”, som omhandler matematikfaget som sådan. Det er altså ikke i udgangspunktet det at lære eller det at undervise som er i fokus, men diskussionen om karakteren af det fag der skal læres og undervises i. Det er altså dette felt som afhandlingen sigter mod at levere et *direkte* bidrag til. Bidraget vil bestå i dels at opstille et analytisk begreb til beskrivelse af matematik som fag, dels at afprøve dette begreb på analyser af forskellige dele af det danske gymnasiematematikfag.

Dermed er det ikke sagt at afhandlingen ikke også bidrager til andre dele af forskningslandskabet. Afhandlingen forventes således at give et *indirekte* bidrag til det der kaldtes ”delteori” 4 og 5. Dette indirekte bidrag vil i første omgang være i kraft af konstruktionen af begrebet *fagidentitet*, som et analytisk begreb der kan bruges til studier af dels undervisere i matematik, dels af institutionelle rammer for matematikundervisning og måske især forbindelsen mellem disse to ting.

Som beskrevet i kapitel 1 var det oprindeligt intentionen med denne afhandling at levere et mere direkte bidrag til dette område af forskningslandskabet, men det har altså ikke kunnet lade sig gøre inden for rammerne af denne afhandling. Det vil dog i diskussionen i kapitel 9 blive diskuteret hvordan denne anvendelse af afhandlingens forskningsbidrag kan tænkes udfoldet, samt hvilke resultater dette kan lede frem til.

Med denne indplacering i forskningslandskabet vil første del af det egentlige bidrag til forskningsverdenen blive præsenteret i næste kapitel. Dette vil være opstillingen af en operationel definition på begrebet *fagidentitet for matematik*, mens den praktiske anvendelse af begrebet vil blive diskuteret i kapitel 4 og resultaterne af anvendelsen vil blive fremlagt i kapitel 5-8 og diskuteret i kapitel 9.

3 Begrebsskelet: Hvordan beskrives en "fagidentitet for matematik".

Dette kapitels formål er at opstille afhandlingens grundlæggende begrebsskelet. Det vil sige at svare på det første delspørgsmål som lød: »*Hvad skal/kan der forstås ved "en identitet for gymnasiematematikfaget" og hvilke identiteter kan der formuleres fra et analytisk udgangspunkt*«.

Ordet "begrebsskelet" er inspireret af det engelske "conceptual framework" (Eisenhart 1991; Lester 2005). Et "skelet" er således den indre struktur for et legeme, som der må "fyldes kød på". Modsat ordet "ramme" – som ofte bruges på dansk for "*framework*", som er en afgrænsning af et indhold.

Et begrebsskelet er altså en sproglig struktur, som skal gøre det muligt at fremstille en "fagidentitet for matematik" på en måde, der kan gøre den til genstand for analyse og diskussion. Strukturen må således bestå af en række kategorier, som alle eksemplarer af en "fagidentitet for matematik" kan formes rundt om. Denne struktur vil blive udviklet i afsnit 3.4, 3.5 og 3.6.

Først vil det dog være nødvendigt med nogle diskussioner af den almene brug af tre centrale begreber. For det første begrebet *identitet*, for det andet begrebet *fag* og for det tredje kombinationen af de to i form af begrebet *fags identitet*. Dette vil blive gjort i afsnit 3.1, 3.2 og 3.3.

3.1 Identitetsbegrebet

Følgende sætning indleder opslaget "*Identity*" i Stanford Encyclopedia of Philosophy:

> Much of the debate about identity in recent decades has been about personal identity, and specifically about personal identity over time, but identity generally, and the identity of things of other kinds, have also attracted attention. (Noonan 2004/2009)

Begrebet *identitet* i sig selv synes altså især at blive koblet tæt til et psykologisk identitetsbegreb, hvor identitet har at gøre med personlighed. Helt overordnet handler det om at identificere de egenskaber ved en "ting" som gør denne til "en person". Altså hvilke egenskaber der kan sondre "en person" fra "en ikke-person". I konkrete tilfælde drejer det sig om at diskutere spørgsmål af typen "hvem er jeg" – det vil sige hvad gør en til den person man er (Olson 2002/2010).

Under denne afhandlings tilblivelse, er jeg ofte stødt på den indvending mod brugen af begrebet *identitet*, at dette var ækvivalent med begrebet *personlig identitet*. Altså et psykologisk begreb. Men som citatet ovenfor viser, bruges begrebet *identitet* i en bredere og mere generel betydning også, i det der tales om »the identity of things of other kinds«.

Begrebet *identitet* bruges i denne sammenhæng netop om "ting af en anden slags" (end personer), nemlig om "matematikfaget i gymnasieskolen". Der ligger altså bag denne brug en forestilling om, at dette navn dækker over et eller flere objekter, som er skelnelige fra andre objekter (og fra hinanden). Særligt objekter som i øvrigt er sammenlignelige med dette/disse.

Der kan skelnes mellem to sammenvævede brug af begrebet. For det første det at skelne ”matematikfag” fra andre fag (som er *ikke*-matematik). Her er ”fag” altså betegnelse for en kategori af objekter som har noget til fælles (de er fag), men samtidigt er forskellige. Det enkelte objekt kan karakteriseres ved nogle egenskaber (en *identitet*), som gør det forskelligt fra de andre.

For det andet at skelne forskellige varianter af ”matematikfaget”. Her bliver ”matematikfag” altså betegnelse for en kategori af objekter, som har til fælles at de forsøger at være manifestationer af ”matematikfaget”, men som alligevel er forskellige. En variant har altså nogle egenskaber som er særlig for den (en *identitet*), mens andre varianter har andre egenskaber (andre *identiteter*).

Det er denne generelle brug af begrebet *identitet* som vil være på færde her. Da der meget specifikt tales om *identitet for fag*, vil dette blive udspecificeret i begrebet *fagidentitet*. Dette er en afgrænsning af begrebet til fag på samme måde, som *personlig identitet* er en afgrænsning til personer.

En særlig gren af begrebet *identitet* handler om hvordan dette forstås over tid (Gallois 2005/2011). Altså når gymnasieskolens matematikfag ser anderledes ud i 2012 end i 1962, er det så et andet matematikfag eller det samme? I denne afhandling vil det blive opfattet som forskellige objekter. Der vil altså være tale om varierende identitet over tid. Dette er et pragmatisk, men nødvendigt valg, for at kunne indfange de problemstillinger der er behandlet i afhandlingen.

3.2 Fagbegrebet

I det foregående bruges begrebet *fag* forholdsvist løst og forforstået. Det er imidlertid nødvendigt at afgrænse hvad der er det fælles ved objekter som tilhører kategorien ”fag”. Ifølge Ordbog over det Danske Sprog betyder *fag* oprindeligt et »ved sammenføjning afgrænset område« (som i vinduesfag og brofag). Heraf følger betydningen »afdeling eller afgrænset område inden for menneskelig viden, virksomhed, osv.« (ODS 1922).

Hos Niss (1990) skelnes således mellem tre slags *fag* (i sidstnævnte betydning): *Professionsfag* som har med en kundskabs- eller færdighedskrævende praksis i samfundet at gøre (f.eks. murer eller læge). *Videnskabsfag* hvor fokus flyttes fra viden og færdigheder målrettet praksis, til produktion af viden i sin egen ret. Og endeligt *undervisningsfag*, hvor viden og/eller færdigheder formidles.

I denne afhandling har især videnskabs- og undervisningsfag interesse. Hos Dolin (2006) skrives:

> *Videnskabsfagene* er sociokulturelle enheder for vidensproduktion. De er baserede på historiske traditioner og har udviklet en organisatorisk forankring i form af institutioner, tidsskrifter, konferencer, stillinger, lærebøger, osv. (Dolin 2006, s. 197, forfatterens fremhævning)

Og videre skrives

> *Undervisningsfagene* er strukturelle og organisatoriske enheder inden for det formaliserede uddannelsessystem som har til formål at sikre gennemførelsen af undervisning i et givent fagområde. Fagområdet kan så være knyttet til et tilhørende videnskabsfag, et erhvervsområde eller et kunstnerisk udfoldelsesfelt. Denne basis for undervisningsfaget kaldes dets *basisfag*. (ibid.)

Fælles for begge fag-typer er altså vendingen *enheder* – det vil sige samlinger af mennesker; *fagpersoner*. Et fag kan altså blandt andet forstås som et kollektiv af mennesker, som forestår bestemte opgaver. Det er i denne betydning ordet bruges i afhandlingen. En anden betydning kan være ”fag som et udsnit af den samlede menneskelige viden”, som foreslået i ”landområde-metaforen” hos Ulrichsen (2001, s. 255)

Beskrivelserne hos Dolin er imidlertid ikke tilstrækkelige til at afgrænse objektet ”et fag”. I Winsløw (2006, s. 29) kan man således videre læse:

> Når man beskriver en videnskabelig disciplin, indgår altid to ting:
> - *Genstandsområdet* – hvad handler disciplinen om?
> - *Metoderne* som disciplinen anvender til at opnå viden om genstandsområdet…

I Jensen (2008, s. 11f) opstilles samme begrebspar, blot kaldet *objekt* og *metode*. Et videnskabsfag er altså et menneskeligt fællesskab, konstitueret af et genstandsområde som eksisterer uafhængigt af faget, samt en eller flere metoder udviklet af menneskene i faget, men under hensyn til objekternes særlige karaktertræk. Jensen opstiller med inspiration fra Newell (1992) endvidere *begreber*, *teorier* og *fakta* som udkommet af metodernes anvendelse på genstandsområdet. Tilsammen udgør *metoder*, *begreber*, *teorier* og *fakta* kernen i den til faget hørende *faglighed*. Fagligheden er den dynamiske side af faget, mens genstandsområdet er *statisk* (eller typisk meget trægt i sin udvikling).

En anden forståelse af begrebet videnskabsfag er at det er en *optik* (Ulrichsen 2001, s. 255), som gør at man med fagets »traditioner og metoder« kan »få øje på noget der ellers var skjult«. I den betydning bliver fag forskellige måder at anskue samme genstand eller problemstilling på. I denne afhandling vil *optik* blive opfattet som et tredje grundelement i et *videnskabsfag*.

Et videnskabsfag er altså et menneskeligt fællesskab konstitueret af søgen efter viden om et *genstandsfelt*, en samling *metoder* til at søge denne viden og en medfølgende *optik* til at anskue problemstillinger ud fra. Produktet af arbejdet med disse tre elementer er en *faglighed*. Et undervisningsfag med et eller flere videnskabsfag som basisfag, er således et menneskefællesskab der søger at formidle et efter målsætning valgt udsnit af basisfagenes faglighed til en gruppe af modtagere.

3.3 Begrebet ”fagidentitet”

En *fagidentitet* må således være noget der fremhæver de særlige træk ved et givent fag, som gør at dette er forskelligt fra andre fag. At vi har med fag at gøre, betyder at disse træk skal findes indenfor genstandsområde, metoder og optikker.

Når denne afhandling overhovedet taler om ”identitet for fag”, er det med inspiration fra de læreplaner for hvert enkelt fag, der findes som bilag 10-55 til ”stx-bekendtgørelsen” (UVM 2010). Hvert af disse starter med et afsnit med overskriften ”identitet”. Selvom hvert fag typisk findes på 2-3 niveauer, er det sådan at afsnittet om fagets identitet er det samme for alle niveauerne. Eksempler fra disse beskrivelser er følgende (UVM 2010, 2010a):

Fysik	Det naturvidenskabelige fag fysik omhandler menneskers forsøg på at udvikle generelle beskrivelser, tolkninger og forklaringer af fænomener og processer i natur og teknik.
Kemi	Kemikeren udforsker og beskriver stoffers egenskaber og betingelserne for, at disse reagerer

Biologi	Biologi er læren om det levende og om samspillet mellem det levende og det omgivende miljø.
Naturgeografi	Naturgeografi omhandler grundlæggende naturprocesser og naturforhold på Jorden og deres betydning for menneskets livsvilkår samt Jordens, livets og landskabernes udviklingshistorie...
Dansk	Fagets kerne er dansk sprog og litteratur.
Mediefag	Mediefagets genstandsfelt er levende billeder i en æstetisk, kulturel og kommunikativ sammenhæng.
Samfundsfag	Samfundsfag omhandler danske og internationale samfundsforhold.
Psykologi	Psykologi er videnskaben om, hvordan mennesker sanser, tænker, lærer, føler, handler og udvikler sig universelt og under givne livsomstændigheder.

Disse udklip viser hvordan fagenes identiteter rummer forskellige genstandsområder som en grundlæggende forskel på fagene. Og det ses hvordan netop genstandsfeltet for en del af fagene er helt eller delvist beskrevet i fagets navn. Om de fire naturvidenskabelige skrives endvidere:

Fysik	Gennem et samspil mellem eksperimenter og teorier udvikles en teoretisk begrundet naturfaglig indsigt
Kemi	Kemisk viden og begrebsforståelse udvikles gennem vekselvirkning mellem på den ene side observationer og eksperimenter og på den anden side teori og modeldannelse
Biologi	Biologi er et naturvidenskabeligt fag med vægt på eksperimentelle arbejdsmetoder, såvel i laboratoriet som i naturen… Biologi giver gennem observationer i naturen og gennem eksperimentelt arbejde indsigt i…
Naturgeografi	Faget tager udgangspunkt i systematisk iagttagelse af, undren og refleksion over forhold i omverdenen

Disse udklip viser hvordan fagenes identiteter rummer både forskelle og ligheder mellem de naturvidenskabelige fags metoder. Fysik, kemi og biologi taler alle om ”eksperimenter”. Fysik og kemi taler om ”teori”. Kemi, biologi og naturgeografi taler alle om ”observationer/iagtagelser”, men med forskellig inddragelse af ”laboratorium”, ”natur” og ”omverden”. Det metodiske aspekt er altså ikke nødvendigvis nok til at skelne fagene, uden at disse tones i forhold til genstandsområdet.

Matematikfagets beskrevne identitet vil blive diskuteret i afsnit 5.1.2. En væsentlig pointe her er, at der slet ikke afgrænses noget genstandsområde for faget. Matematik præsenteres således alene som metoder og optik. Påstanden her vil være, at dette afspejler et helt særligt forhold for faget, nemlig grundlæggende forskellige syn blandt dets fagpersoner på, hvad fagets identitet egentlig rummer. Altså hvad hører til i faget og hvad gør ikke. Hvad er uundværligt for faget, hvad er ikke.

Denne diskussion vil især være relevant for et undervisningsfag. Hvor fagpersonerne i et videnskabsfag på lange stræk kan arbejde med det de laver i fred, skal fagpersonerne i et undervisningsfag helst have en eller anden grad af fælles retning. Fagidentitetsbegrebet bliver således til et begreb der skal kunne beskrive stridigheder om en sådan retning. Det er imidlertid et valg for denne afhandling, at den ikke søger at opstille noget generelt begrebsapparat til at beskrive dette. I stedet må der opstilles et begrebsapparat specifikt for matematik. I hvilken grad hele eller dele af et sådan potentielt vil kunne finde anvendelse for andre fag, tages der ikke stilling til.

3.4 Hvad begrebet ”fagidentiteter for matematik” skal kunne

Det egentlige begreb som skal konstrueres her, er begrebet *fagidentitet for matematik*. De tidligere afsnit i kapitlet har handlet om at afgrænse betydningen af velkendte begreber, samt kort at beskrive dels bevæggrund dels betydning af begrebet *fagidentitet* i lidt mere generelle termer. Dette blot som opvarmning til den egentlige begrebskonstruktion.

Ved konstruktion af et begreb er der umiddelbart tre forhold der må tages i betragtning:

1. Hvilke objekter i verden skal indfanges af begrebet – begrebets *genstand*.
2. Hvor henne kan man forvente at finde disse objekter/genstande – begrebets *domæne*.
3. Hvilke andre ord/begreber konkurrerer med det opstillede begreb, enten fordi de søger at beskrive helt eller delvist samme objekter/genstande, eller fordi de trækker på de samme ord, men som beskrivelse af helt andre objekter/genstande.

Når disse tre forhold er beskrevet, vil det næste trin være at opstille en nuancering af begrebet, som gør det muligt at skelne mellem forskellige objekter der indfanges. Et begreb er altså i den forstand en kategori som rummer mange forskellige objekter, der har noget til fælles som gør at de alle er med i kategorien, og gør dem forskellige fra objekter der ikke er med. Men som samtidigt har nogle forskelle, som gør at de netop er forskellige repræsentanter for kategorien.

Et eksempel er begrebet ”frugt”, hvis genstande bl.a. er æbler, pærer og appelsiner. Disse har noget til fælles som gør at de alle er en del af kategorien, men er samtidigt forskellige, hvorfor der netop er tale om forskellige objekter i kategorien. Begrebet ”fagidentiteter for matematik” er ligeledes en kategori med en række objekter med noget til fælles, samt noget der skiller dem.

3.4.1 Begrebets genstande

Tre forestillede situationer: 1) En underviser i matematik på X-by Gymnasium kigger ned i den nye læreplan. På listen over ”kernestof” optræder ikke differentialkvotienten for division af to funktioner. Ej heller beviset for kædereglen. Underviseren kommenterer arrigt: ”Det har jo snart ikke noget med matematik at gøre mere!”. 2) En underviser i matematik på Y-købing Gymnasium bladrer i en ny lærebogs 10 sider lange historiske introduktion til trigonometriske funktioner. Underviseren mumler: ”Hvad skal alt det snak til for? Hvorfor kommer de ikke til sagen!”. 3) En underviser i matematik på Z-havn Gymnasium læser i avisen, at Kinas et-barnspolitik svækker landet i den langsigtede konkurrence med Indien. Underviseren tænker: ”Spændende problem. Det må vi analysere på Matematik A-holdet i morgen.”.

I hvert af de tre eksempler manifesterer sig objekter af typen ”fagidentiteter for matematik”. I de to første eksempler som et sammenstød mellem to identiteter, i det sidste blot ved manifestation af en enkelt. Manifestationen kommer til udtryk ved en stillingtagen til relationen mellem på den ene side et bestemt objekt eller en bestemt problemstilling og på den anden side gymnasiefaget matematik.

I eksempel 1 drejer det sig om objekter som ”differentialkvotient” og ”kæderegel”, samt problemstillinger som ”bevis for…”. I eksempel 2 drejer det sig om objektet ”trigonometriske funktioner” og problemstillingen om, hvilken historisk oprindelse studiet af sådanne måtte have. I eksempel 3 er et objekt f.eks. "Kinas et-barnspolitik" og problemstillingen er dennes indvirkning på landets økonomiske udvikling.

Det synes oplagt, at objekter som "differentialkvotient", "kæderegel" og "trigonometriske funktioner" primært er studieobjekt for faget matematik. Ligesom levende organismer og deres omgivende miljø oplagt er objekter som studeres i faget biologi. Og at "Kinas et-barnspolitik" umiddelbart er et studieobjekt indenfor samfundsfag. Fra en ren objekt-vinkel, kan et fags identitet således beskrives ud fra hvilke studieobjekter identiteten inviterer inden for i faget. Det var dette identitetsbegreb der blev beskrevet i afsnit 3.3.

Anlægger man en objektiv-vinkel på identitetsspørgsmålet, forstår man imidlertid bedre eksistensen af forskellige identiteter indenfor et fag. Et objekt som "kædereglen" kan anskues som et *begreb*, en *færdighed*, en *sætning med bevis* og lignende. I de forskellige tilfælde er der tale om bestemte måder at se objektet på – forskellige *objektiver*. De er ikke gensidigt udelukkende, men i forskellige manifestationer af faget, kan de være vægtet med ganske forskellig styrke.

Tilsvarende kan objektet "Kinas et-barnspolitik" og problemstillingen om dettes indvirken på konkurrenceforholdet mellem Kina og Indien, sagtens beskues gennem et objektiv der hører matematikken til. Hvor vidt det hører sig til inden for rammerne af faget matematik at gøre sådan – samt hvordan, indenfor et spektrum af variationer over hvordan det kan gøres – er et spørgsmål om fagets identitet, som den tager sig ud i konkrete manifestationer. Denne type problemstilling vil ofte have karakter af *anvendelse af matematik*, og konfliktpotentialet ligger gemt i det forhold, at det studerede objekt ikke hører oplagt til i matematikfaget (men ofte i et andet fag), selvom objektivet gør.

Også objektiver formet efter andre fags metoder (f.eks. *historisk*, *filosofisk* eller *sociologisk*) kan inddrages i matematikfagets undersøgelse af matematiske objekter og deres relation til kultur, samfund, mv. Det vil vi typisk genkende som *metarefleksioner om matematik*. Her vil objektivets relationer til andre fag, samt i mange tilfælde også objektets, kunne skabe konflikter om hvor vidt brugen af det hører til indenfor matematikfagets rammer.

En fagidentitet for matematik er altså et syn på hvilke objekter og objektiver der så at sige kan rummes inden for faget. Tillige også hvilke objekter og objektiver der ikke kan udelades. Som objekt optræder en "fagidentitet for matematik" ethvert sted hvor matematik manifesterer sig som fag. Der kan så at sige sagtens optræde objekter og problemstillinger vi forbinder med matematik – f.eks. i undervisning i fysik eller samfundsfag – uden at det er selve faget (dvs. det menneskelige fællesskab af matematik-fagpersoner) der manifesterer sig.

Hvis man på denne baggrund skal opstille en formel afgrænsning af begrebet "fagidentitet for matematik", så er dette altså et *helhedssyn* på hvilke objekter, objektiver og problemstillinger der kan behandles *selvstændigt* i faget. Med "helhedssyn" forstås her at det skal være principielle retningslinjer der gælder generelt, ikke blot stillingtagen til konkrete enkelttilfæde. Og med "selvstændigt i faget" forstås at det er inden for rammerne af matematik, når det står alene som fag. Matematik som en bredere beskæftigelse i andre fag og dagliglivet er ikke direkte involveret i afgrænsningen.

3.4.2 Begrebets domæner

Hvor afsnit 3.4.1 diskuterede begrebets *objekter*, det vil sige hvad kendetegner det dyr vi taler om, så diskuterer dette begrebets *domæner*, altså hvor lever dyret. Hvor skal man kigge hen, for at kunne observere en ”fagidentitet for matematik”. Oplagt er det ikke noget nemt dyr at få øje på.

Det første der må stå klart er, at fordi ”faget matematik” er menneskeskabt og eksisterer i kraft af mennesker, så er det også sådan for en ”fagidentitet for matematik”. Det betyder dog ikke at en fagidentitet udelukkende eksisterer i kraft af et konkret menneske. Det kan også eksistere i kraft af menneskeprodukter, fremstillet af ét eller flere individer.

Fagidentiteter kan altså eksistere i kraft af et konkret menneske. Til enhver fagperson knytter sig således en fagidentitet. I konteksten *gymnasiefaget matematik*, er sådanne fagpersoner først og fremmest gymnasieskolens matematiklærere, sekundært folk med faglig skoling i matematikfaget, som udefra søger at agere i forhold til undervisningen. En matematiklærer er således et domæne, hvorpå der lever en ”fagidentitet for matematik”. Og gymnasiets matematiklærere er en klasse af domæner, med en lang række fælles træk.

Der kan rejses flere diskussioner i tillæg til dette. Først og fremmest om en konkret fagperson nødvendigvis *har* en fagidentitet og om en fagperson ikke kan have mere end én. I forhold til det sidste kan det komme til udtryk på to måder. En person kan have flere sameksisterende (parallelle) identiteter eller at personens fagidentitet afhænger af kontekst (serielt). En beslutning om at opfatte en fagperson som havende én fagidentitet vil i parallel-tilfældet betyde at personens fagidentitet fremstår *uklar*, hvilket det endelige begrebsapparat må kunne håndtere. I serie-tilfældet vil det betyde at man opfanger den fagidentitet, som er aktiv i den kontekst hvor fagidentiteten kortlægges.

Hvis en fagperson slet ingen fagidentitet har, vil det i praksis komme til udtryk ved, at personens afgørelse af om et objekt eller problemstilling kan behandles selvstændigt af faget, enten er helt tilfældig, eller er styret af andre rationaler end et helhedssyn på faget. Det kan f.eks. være hvor tidskrævende en behandling er, om den forventes at være sjov eller spændende, om eleverne kan finde ud af det og lignende ikke-faglige begrundelser. Dette vil almindeligvis komme til udtryk i en *uklar* identitet. At en fagidentitet er uklar, kan således have forskellige årsager.

Udover at faget matematik kan manifestere sig i kraft af en fagperson, kan det også manifestere sig i kraft af produkter af fagpersoners indsats. Sådanne produkter vil først og fremmest eksistere i kraft af *skriftligt materiale*. Hovedformen er bøger. Taler vi matematik som undervisningsfag, vil fag særligt manifestere sig i kraft af *lærebøger* og for gymnasiefagets vedkommende *lærebogssystemer*. Undervisningsfaget manifesterer sig samtidigt i form af officielle dokumenter – altså et *curriculum*.

Et system af lærebøger til brug for undervisning i matematik i gymnasiet opfattes her som et domæne hvor matematik manifesterer sig som fag, med en tilhørende fagidentitet. *Lærebogssystemer* er således en klasse af domæner. Ligeledes opfattes det samlede system af officielle dokumenter som et domæne hvor en fagidentitet eksisterer. Dette domæne kaldes *systemet*. I en nu-og-her-betragtning har klassen af domæner som kan kaldes *systemer* kun ét medlem. Men analytisk eller historisk betragtet, har kategorien naturligvis flere medlemmer.

Om disse to typer af domæne kan rejses tilsvarende spørgsmål om entydigheden af den fagidentitet de manifesterer. For lærebøger er forventningen, at de er et produkt af typisk 1-3 fagpersoners arbejde. Da det er forventeligt at personer som sammen skriver et lærebogssystem har nogenlunde samme syn på faget, forventes lærebøger at have en klar fagidentitet. Systemet er derimod udtryk for et kompleks af påvirkninger fra mange fagpersoner, hvilket i højere grad gør fagidentiteten uklar. Igen et behov for at begrebets mere konkrete indretning rummer plads til "uklarhed".

Hvor lærere må opfattes som et domæne med en *flydende* fagidentitet, der kan omformes ved forskellige påvirkninger og som let ændrer sin form, så må lærebøger og system siges at have en *størknet* fagidentitet. Dermed skal forstås, at når en bog eller en læreplan er skrevet og publiceret, så ligger indholdet grundlæggende set fast. Denne pointe er særlig vigtig for metodiske overvejelser.

I denne afhandling vil de nærmere undersøgelser afgrænse sig til domæner inden for de tre nævnte klasser: *undervisere*, *lærebøger* og *systemet*. Andre typer af domæner kan sikkert identificeres, men det er vurderingen at disse tre må siges at være de tre mest dominerende ved tilblivelsen af gymnasifaget matematik, sådan mere overordnet betragtet.

3.4.3 Identitetsbidrag

Selvom "fagidentitet for matematik" nu er et forholdsvist veldefineret objekt, der eksisterer indenfor veldefinerede domæner, så er det stadig et objekt der er svært at gøre til genstand for egentlig beskrivelse og analyse. Selv i størknet form i eksempelvis en lærebog synes det ikke muligt at "se" en fagidentitet for matematik og ud fra det umiddelbart afdække dets karakteristika, så det kan sammenlignes med andre fagidentiteter.

Det er derfor – især metodologisk – nødvendigt at kunne nedbryde en fagidentitet i nogle mindre bestanddele, som kan analyseres i sig selv, således at hele fagidentiteten kan søges karakteriseret ved, at sammenfatte disse enkelte analyser.

Begrebet *identitetsbidrag* vil derfor blive brugt til at beskrive et konkret enkeltelement på et domæne, som indgår i domænets *helhedsbillede* af matematik som gymnasiefag. Intentionen er, at identitetsbidrag afgrænses sådan, at de hver især ikke meningsfuldt kan inddeles i yderligere elementer. Altså er det så at sige et *atom* for en konkret manifestation af faget.

Den metodiske pointe med en sådan inddeling er en antagelse om, at hvert enkelt identitetsbidrag kan opfattes som en instans af den identitet som overordnet set hersker på det undersøgte domæne. Ved at beskrive et stort antal af identitetsbidrag fra et givet domæne med samme begreber som identiteten overordnet skal beskrives med, kan disse atom-beskrivelser samles til en helhed.

Eksempler på identitetsbidrag kan for en lærebog være en opgave, et stykke tekst, et eksempel, en sætning, et bevis, med mere. For systemet kan det være en sætning i formålsbeskrivelsen, et punkt i en pensumliste eller en nationalt stillet eksamensopgave. For underviserne er det væsentligt sværere, fordi den tilhørende fagidentitet ligger skjult i deres bevidsthed. Her er et identitetsbidrag i højere grad noget der skal konstrueres i en vekselvirkning med personen. Det kan f.eks. være en stillingtagen til en opgave, besvarelse af konkrete spørgsmål, videooptaget undervisning, egne noter, etc.

3.5 Berøring med andre begreber

Ved konstruktionen af et begreb er det som sagt afgørende at undersøge om andre har konstrueret tilsvarende sammenfaldende begreber, samt om det eller de ord man knytter til sit begreb er blevet knyttet af andre til begreber med en divergerende betydning. Det er forventeligt at sammenfald og divergens ikke altid er fuldstændige, men kan være delvise.

3.5.1 Konkurrerende brug af ordet *identitet*

Som beskrevet indledningsvis har ordet *identitet* en meget generel betydning, som gør at det anvendes i mange forskellige konkrete sammenhænge. Særligt som et psykologisk begreb, der har at gøre med enkeltpersoners refleksioner over ”hvem er jeg”. I dette afsnit skal jeg ikke gå dybere i konflikten med den generelle brug af ordet (se afsnit 3.1). I stedet vil jeg slå ned på et par anvendelser i den egentlige matematikdidaktiske litteratur. Dette giver ikke et udtømmende billede, men blot to eksempler på anden brug af ordet.

Hos Boaler (2000a) er ordet identitet knyttet til elevens forhold til faget. Boaler peger på at elever opfatter faget som en praksis baseret på eksempelvis abstraktion, individualisme, konformitet og uniformitet. Dette betyder eksempelvis at selv elever som er dygtige til matematik frastødes af faget, fordi de opfatter sig selv som værende på en anden måde (Boaler 2000b). F.eks. at de opfatter sig selv som en »kreativ, emotionel eller social person«.

Hos Boaler er identitet altså først og fremmest noget den enkelte elev har, men samtidigt noget som forbinder eleven med faget, der så at sige også får en identitet. Identiteten handler dog ikke så meget om fagets faglige indhold, som om de mere almene træk ved fagets måde at være organiseret på.

Et lignende identitetsbegreb – dog uden involvering af elever – kan findes i Leung (2001). Her søges der efter en særlig Østasiatisk identitet for skolefaget matematik. Dette holdes op imod en vestlig identitet, ved at opstille en række modsætninger:

- Produkt/indhold versus proces
- Udenadslære versus meningsfuld læring.
- Studere hårdt versus behagelig læring
- Ydre versus indre motivation
- Klasseundervisning versus individuel læring
- Lærer med faglige kompetencer versus pædagogiske kompetencer.

Heller ikke hos Leung har identitet noget med fagets indhold at gøre. Og i modsætning til hos Boaler kan identiteten knapt bruges til at se forskelle mellem matematik og andre fag, men alene til at skelne en skoletradition fra en anden. Der er altså snarere tale om en skoleidentitet end en fagidentitet. Men der altså tale om en brug af identitetsbegrebet i det matematikdidaktiske felt.

Brugen af ordet *identitet* kan altså sagtens føre til forvekslinger. Derfor er præciseringen *fagidentitet* ganske nødvendig. Men selv her kan det godt forveksles med to ovenstående betydninger. Ordet skal altså bruges med en omtanke for de forforståelser der følger med det.

3.5.2 Konkurrerende begreber

Der er ikke i litteraturen fundet nogen begrebsdannelse der forsøger tilnærmelsesvis at beskrive det samme, som den der opstilles her. Så i snæver forstand er der ikke umiddelbart noget konkurrerende begrebsapparat. Der er dog en række begreber som i varierende grad har en fællesmængde med det her diskuterede begreb. Disse vil kort blive diskuteret her, ikke med fokus på deres brug andre steder, men på hvilken forforståelse der gør dem mindre egnede til det herværende formål.

Et konkurrerende begreb er *matematikkens natur* (se afsnit 2.1.2). At tale om et fænomens natur leder tankerne hen på egenskaber, som er konstituerende for fænomenets almindelige kategorisering. ”Matematikkens natur” må så at sige være overholdt af alle manifestationer af *matematik*, hvilket ikke harmonerer med formålet her. Når det konkurrerer med begrebet *identitet*, er det fordi begge dele søger at beskrive egenskaber ved helheder. I en vag beskrivelse af relationen mellem begreberne, kan man således sige at *matematikkens natur* udgør et udfaldsrum for *matematikkens identiteter*.

Et andet konkurrerende begreb er *curriculum*. Dette ord har en bred betydning (Winsløw 2006, s. 191f). Begrebet konkurrerer fordi et *curriculum* er et forsøg på at helhedsbeskrive et fags tilstedeværelse på et bestemt sted. Når begrebet afvises her, er det særligt fordi det læner sig meget op ad *system*-domænet, til dels *lærebogs*-domænet, men absolut ikke *underviser*-domænet.

Et tredje – og her sidstnævnte – konkurrerende begreb er det engelske *belief*, som direkte oversat til dansk betyder *tro*, men oftere oversættes til *forestilling* eller bruges uden oversættelse (se afsnit 2.1.4). Begrebet er knyttet til psykologien. ”En belief” findes så at sige i hovedet på et menneske. Det vil derfor almindeligvis forbindes med *underviser*-domænet, men ikke med *system*- og *lærebogs*-domænet. Argumentet er dog utilstrækkeligt, for sidstnævnte domæner er netop menneskeprodukter og afspejler således psykologiske processer, om end karakteren af disse er uklar.

Når *belief*-begrebet afvises her skyldes det således en væsentligere argumentation. Begrebet lægger nemlig sprogligt op til en sand-falsk-dikotomi. At der kan være ”rigtige” og ”forkerte” beliefs – altså beliefs og *mis*beliefs. Man kan tro eller forestille sig noget, som ikke er rigtigt. Begrebet knytter sig ofte til elever og lærerstuderende, som netop kan få fejlopfattelser af faget. Men for gymnasielærere, uddannet til fagets højeste niveau, er det meningsløst at tale om ”rigtige og forkerte opfattelser”. Her kan der i stedet tales om uenigheder mellem ligeværdige synspunkter.

Begrebet *identitet* er således valgt fordi det klart indikerer at der ikke opereres med et ”rigtigt” og et ”forkert”. Identiteter er hverken rigtige eller forkerte, de er blot udtryk for nogle karakteristiske egenskaber ved et objekt, som gør det skelneligt fra andre objekter med mere eller mindre forskellig identitet. Det er således denne dagsorden der begrunder valget af *identitet* overfor *belief*.

Brugen af identitet som *ord* og *begreb*, støder altså på en række mulige misforståelser og på et vist element af at ”give de samme ting forskellige navne”. Også flere eksempler end der er givet her, selvom de umiddelbart vurderes til at være de væsentligste. Det er naturligvis vigtigt at læse denne afhandling vidende, at begrebet her er blevet tildelt sin egen lokale betydning.

3.6 At skelne begrebets genstande

På dette sted skulle det gerne stå klart hvad det er for en type objekt der søges indfanget med begrebet *fagidentitet for matematik* og hvor sådanne objekter findes. Det siger imidlertid ikke så meget om hvordan objektet ”ser ud” eller hvilke karakteristika der definerer væsentlige forskelle mellem forskellige eksempler på objekter. At udvikle begrebsapparatet så det kan bruges til sådanne beskrivelser, vil være dagsordenen for resten af dette kapitel.

Opgaven er altså at formulere nogle sproglige kategorier, som gør det muligt at beskrive en *fagidentitet for matematik* på en brugbar måde. ”Brugbar” er i denne sammenhæng noget der må defineres. Udgangspunktet for dette er en antagelse om, at objektet ”en fagidentitet” ontologisk set snarer er et analytisk produkt, end en empirisk realitet. Det handler altså ikke om at finde ind til objektets virkelige essens, men snarere om at konstruere et par briller der gør at det kan analyseres efter behov.

Det her opstillede begrebsapparat er derfor en pragmatisk størrelse, som skabes ud fra hvad der ønskes set ved studiet af *fagidentiteter*. Det opstilles altså særligt tilpasset denne afhandling. Det betyder ikke at det ikke kan anvendes af andre eller i andre sammenhænge, men at det sagtens kunne have set anderledes ud. Der er altså tale om kvalificerede og bevidste valg, men altså om valg.

3.6.1 Tre overordnede dimensioner

Da denne afhandling ser på matematiks fagidentitet i *det almene gymnasium*, er det oplagt at lade nuanceringen af begrebsapparatet tage afsæt i nogle distinktioner, som er særligt relevante i denne institutionelle kontekst. En vigtig indgang til arbejdet med denne afhandling har været relationen mellem *teoretisk* (dvs. ”*ren*”) og *anvendt* matematik. Denne distinktion må derfor være repræsenteret i den overordnede begrebsstruktur.

I gymnasiekonteksten støder man imidlertid også på aktiviteter, hvis karakter i højere grad handler om at undersøge matematikken som fag, end matematikkens genstande eller anvendelse. Dette kan bl.a. være studier af fagets historiske udvikling eller filosofiske grundlag. Denne type af reflekterende problemstillinger vil jeg kalde for *meta*-spørgsmål.

Når objekter og problemstillinger behandles (i den bredeste betydning af ordet ”behandles”) i matematikundervisning kan de altså siges at være spændt op mellem tre forskellige hensyn, som i passende grad kan siges at være uafhængige af hinanden. Der kan tales om en *teori*-dimension, som omhandler studier af matematiske objekter og strukturer – altså arbejde *i* matematik. Om en *anvendelses*-dimension hvor matematiske objekter og strukturer behandles i en mere eller mindre veldefineret ikke-matematisk kontekst – altså arbejde *med* matematik. Og om en *meta*-dimension, hvor spørgsmålene drejer sig om at reflektere over matematik som fag – altså arbejde *om* matematik. På kort form vil disse tre dimensioner blive omtalt som *i*-, *med*- og *om*-dimensionerne.

Begrebstriplen ”i, med og om” er et slagord der stammer fra det naturvidenskabelige uddannelsesmiljø ved Roskilde Universitet, specielt omkring matematik og fysik. Det har fundet lignende anvendelse i andre fagdidaktiske arbejder (se f.eks. Jankvist 2007).

Overordnet betragtet, er en afvejning af hvor væsentlige de tre dimensioner fremstår i forhold til hinanden, en god første tilnærmelse til at kunne skelne forskellige fagidentiteter fra hinanden. En fagidentitet kan f.eks. have hele sit fokus på *i*-dimensionen, fordi den passivt eller aktivt ignorerer de to andre dimensioner. Eller måske åbne minimalt for *om*-dimensionen, ved at behandle enkelte teoretiske elementers historiske oprindelse. Eller for *med*-dimensionen ved at eksemplificere teoretiske elementers anvendelse. Men fokus kan også være radikalt anderledes, så det især er *med*-dimensionen der er i fokus, mens *teori*-dimensionen kun indgår som understøttende for denne.

Det opfattes altså som meningsfuldt at beskrive en fagidentitet alene i afvejninger mellem *i*-, *med*- og *om*-dimensionerne, men dette er ikke *tilstrækkeligt* for ambitionen her. Der kan være for store variationer mellem identiteter der har ensartede forhold mellem dimensionerne. Derfor må hver enkelt dimension nuanceres yderligere på passende vis.

Dette vil ske ved at der for hver dimension konstrueres et sæt af *tyngdepunkter*. Med "tyngdepunkt" ønskes det at signalere, at der ikke er noget naturligt hierarki eller nogen naturlig ordning af de valgte nuanceringer. Ej heller at de er gensidigt udelukkende. Der er alene tale om noget der kan have mere eller mindre tyngde afhængigt af hvilke objekter og problemstillinger der behandles og hvordan de behandles.

Den samlede mængde af tyngdepunkter i en dimension skal fungere sådan, at et identitetsbidrag der fokus i en dimension, altid har tyngde i mindst ét tyngdepunkt. Og omvendt, at der ikke er tvivl om hvilke tyngdepunkter (altså flertydighed). Tyngden af et tyngdepunkt vil blive målt på den løst definerede skala: "ingen", "lille", "mellem" og "stor". Identiteten som helhed – herunder forholdet mellem de tre dimensioner – vil således bygge på en samlet vurdering af helhedsindtrykket af indplaceringen af de enkelte identitetsbidrag.

Tyngdepunkterne er som objekter svære at karakterisere. De repræsenterer i en vis forstand læringsmål, uden at være det. Problemet med læringsmål er, at de repræsenterer subjektive intentioner, som ikke nødvendigvis realiseres. Derfor skal tyngdepunkterne snarer opfattes som funktioner i den forstand, at de repræsenterer det der realiseres, uanset om nogen har haft det som målsætning.

I de følgende tre afsnit vil tyngdepunkterne for hver af de tre dimensioner blive konstrueret. Det vil i et vidst omfang ske i samspil med eksisterende litteratur omkring begreber, der i større eller mindre grad ligner de anvendte.

3.6.2 Teori-dimensionen

Teori-dimensionen er det aspekt af matematikfaget som omhandler omgang med matematiske objekter og strukturer. Den præcise definition af matematisk objekt og –struktur er svær at give, men hovedsagen er at de er relativt nemme at genkende når man ser dem. Der er tale om genstande der formuleres i matematisk sprog, uden at referere til noget ikke-matematisk. En undtagelse fra sidstnævnte er naturligvis, at der i matematisk sprog refereres til symboler, figurer mv., som repræsentanter for "rene" matematiske objekter og –strukturer, der af natur er abstrakte og uhåndgribelige. Dimensionen er – i modsætning til de to andre – svær at undvære fuldstændigt i en identitet.

Omgange med matematiske objekter og strukturer kan have forskelligt fokus, afhængigt af hvilke konkrete problemstillinger der lægges vægt på. Målet med de opstillede tyngdepunkter er at kunne begribe forskellige afvejninger. I denne afhandling vil dimensionen have følgende tyngdepunkter:

- Færdighedstræning
- Problemløsning
- Ræsonneret retfærdiggørelse
- Teori-forståelse
- Begrebskendskab
- Konventionskendskab

At der er seks punkter og at punkterne er netop disse seks, er som sagt et pragmatisk valg, truffet ud fra hvilke kriterier forskellige fagidentiteter skal kunne skelnes med. Tyngdepunkterne beskriver analytiske effekter af en fagidentitet i en undervisningskontekst. Punkterne beskriver således indholdet af faget, frem for en undervisningspædagogisk praksis omkring indholdet. I det følgende vil tyngdepunkterne blive diskuteret 1-2 ad gangen:

Færdighedstræning og problemløsning

Færdighedstræning og *problemløsning* er som tyngepunkter beslægtet. Lesh & Zawojewski (2007) skriver at matematikundervisningen i USA over perioder på 10 år svinger mellem fokus på »basic skills« (færdigheder) og »problem solving« (problemløsning). Hos Schoenfeld (2007) beskrives samme som en bevægelse mellem »teaching for mastery« og »teaching for understanding«.

I den danske litteratur (Jensen & Niss 2002, s. 49; Jensen 2009) finder man en tilsvarende distinktion, hvor *opgaver* (som generel betegnelse for eksplicitering udfordringer i matematikundervisning) inddeles i *øvelser* og *problemer* (se også afsnit 2.2.2). Opgave er da en objektiv betegnelse, mens det afhænger af opgaveløseren om opgaven har karakter af at være et problem eller en øvelse.

Distinktionen er altså mellem på den ene side matematiske aktiviteter der søger at etablere, træne og fastholde bestemte *rutinefærdigheder* hos eleven. Det er sådanne man ofte møder i form af såkaldte *typeopgaver*. På den anden side aktiviteter, som fordrer at eleven må »finde på et eller andet der ikke lige springer i øjnene«, for at kunne besvare opgaven. Sidstnævnte vil således være at betragte som træning af en egentlig *problemløsningskompetence*.

Distinktionen mellem færdighedstræning og problemløsning synes således at være uundgåelig for en diskussion af fagidentiteter for matematik. Det svære er dog begrebernes relative karakter. Det kræver at man i den konkrete analyse forholder sig til, om et givet identitetsbidrag repræsenterer rutinetræning eller problemløsning. I en generel analyse kan man således vælge at tage afsæt i en eller anden form for fiktiv gennemsnitselev.

Her vil distinktionen blive lagt mellem *færdighedstræning* som arbejde med forventeligt velkendte løsningsalgoritmer, der umiddelbart kan avendes på opgaven, og hvor situationen klart indikerer at det er det som skal gøres. Omvendt vil *problemløsning* være arbejde med opgaver, hvor løsningen ikke er direkte tilgængelig, men kræver selvstændigt arbejde med en egentlig løsningsstrategi.

Ræsonneret retfærdiggørelse

Ræsonneret retfærdiggørelse handler om muligheden af at undersøge sandhedsværdien af et udsagn, alene på baggrund af ræsonnementer. Der tænkes her bredere end formel logisk-deduktive slutninger. Harel & Sowder (1998) arbejder med begrebet *bevisskema* ("proof scheme"), som dækker over det der ifølge en person skal til for at overbevise personen selv eller andre om, at en formodning er et faktum. I et større empirisk studie, identificeres den baggrund en række forskellige typer af bevisskemaer hos amerikanske college-studerende, som overordnet set falder i tre klasser.

Ekstern overbevisning, baseret på tilstedeværelsen af en *autoritet*, et særligt ritual eller en særlig symbol-manipulation. *Empirisk bevisskema*, som baserer sig på induktion eller perception. Og *analytisk bevisskema*, som baserer sig på transformation af abstrakte objekter eller på deduktion fra egentlige aksiomer. De to typer af analytisk bevisskema fininddeles yderligere.

Et bevissystem er for så vidt en subjektiv sag, men hele taksonomien omkring begrebet er velegnet til at tale om den mangfoldighed af retfærdiggørelsesformer som hører ind under tyngdepunktet. Identitetsbidrag som etablerer, udvikler eller aktiverer bevissystemer, kan siges at have vægt i tyngdepunktet *ræsonneret retfærdiggørelse*.

Teoriforståelse

Teoriforståelse handler om at kunne forstå teoretiske resultater i matematik, samt anvende disse til at analysere og undersøge andre matematiske situationer. Teoriens rolle er umiddelbart ikke velbeskrevet i litteraturen, men begrebet *teoriforståelse* må kunne hænges op på begrebet *teori*. Niss (2006) giver et bud på en generel definition af begrebet *teori*, som værende *et organiseret netværk af begreber og påstande* ('concepts and claims') om et større domæne, klasse af domæner, objekter, situationer og fænomener. Begreberne er forbundet i et sammenhængende hierarki, så nogen er grundlæggende og andre opbygget af de mere grundlæggende. Og påstandene er enten fundamentale (hypoteser, antagelser, aksiomer) eller afledt af fundamentale påstande (formelt eller materielt).

Omgang med teorier er altså en mangesidet sag. Kendskabet til de indgående begreber er et tyngdepunkt i sig selv og ligeledes er det at overbevise sig om de formelt afledte sammenhænge (ræsonneret retfærdiggørelse). Teoriforståelse handler om at kunne navigere rundt med de i teorien indgående påstande. Det vil sige at anvende disse påstande på konkrete matematiske situationer. Matematik har således en stor samling af teoretiske resultater, som finder anvendelse i en række situationer.

Et eksempel på teoriforståelse kan være at kunne udnytte differentialkvotienter til at undersøge grafer, ved at kende til de teoretiske resultater for sammenhængen mellem en funktions graf og funktionens afledte funktion. Et andet eksempel kan være at kunne arbejde med areal-fortolkningen af det bestemte integral Et tredje eksempel at kunne bruge, at hvis man kender tre stykker i en trekant, herunder mindst én side, så kan de ukendte stykker beregnes. Og så videre.

Begrebskendskab

Begrebskendskab handler om at kende til og forstå matematiske begreber. Ifølge Vinner (1991) er begreber for professionelle matematikere typisk lig med *definitioner*, men i en undervisning er det mere komplekst. Der kan således fra at kognitionspsykologisk synspunkt skelnes mellem *begrebsnavn*, *begrebsdefinition* og *begrebsbillede* (”concept name”, ”-definition” og ”-image”).

Begrebsbilledet er en individuel størrelse. En kompleks mental struktur af oftest ikke-verbale associationer knyttet til begrebsnavnet. Hos individet vil begrebsnavnet aktivere hele eller dele af begrebsbilledet. Hvilke dele vil typisk afhænge af tid og sted. En begrebsdefinition har en dobbeltrolle. For det første kan den bidrage til at danne og omdanne begrebsbilleder og for det andet kan den potentielt beskytte en mod f.eks. en utilstrækkelig aktivering af begrebsbilledet.

I Vergnaud (1997) opstilles en mere operationel model for dannelse af begreber hos elever, i det et matematisk begreb beskrives som en trippel af tre mængder: $C = (S,I,R)$. For det første en mængde S af *situationer* hvor begrebet er brugbart og meningsfuldt. For det andet en mængde I af *operationelle invarianter* som individer kan bruge til at håndtere situationen. Og for det tredje, en mængde R af *symbolske repræsentanter* for invarianter, situationer og procedurer.

Det er de *operationelle invarianter* der er begrebets essentielle kilde, men sprog og symboler spiller også en essentiel rolle. Der skelnes altså mellem *repræsenteret* og *repræsentanter* (”signified” og ”signifiers”). Carraher (2008) eksemplificerer det med at der historisk har eksisteret mange notationer og algoritmer inden for aritmetik, som kan give indtryk af ”forskellige matematikker”. Men underlæggende er aritmetikken den samme – altså en *invariant*.

Et identitetsbidrag kan således siges at give en fagidentitet tyngde i begrebskendskab, hvis dette i særlig grad kan siges at bidrage til opbygning af et (eller flere) begrebsbillede(r) hos eleven. Dette i form af formidling af invarianter, repræsentanter og situationer.

Konventionskendskab

Konventionskendskab handler om at kende, forstå og huske de mange konventioner i form af navne, notationer og præcisioner der knytter sig til fagets begreber, resultater, mv. Konventioner er ikke så velbeskrevet i litteraturen, som f.eks. beviser og begreber.

I Carpenter et. al (2003) tales om ”lighedstegnet som konvention”. Elever opfatter ofte lighedstegnet som et proceskommando frem for en ækvivalensrelation mellem aritmetiske udtryk. Denne skelnen er en *konvention*, idet der ikke findes nogen egentlig retfærdiggørelse for det ene eller det andet. Her er altså tale om en konvention for notation.

Og i Proulx (2007) tales om en distinktion mellem det at forveksle ”Δx/Δy” med ”Δy/Δx” og så det ikke at kunne forstå begrebet *vækstrate*. At det ofte er den anden størrelse der knyttes til begrebet, er en konvention. Tilsvarende nævnes at det er en konvention for divisionsalgoritmen som afgør, at ”18:4” har svaret ”4 rest 2”, men ikke ”3 rest 6”. Her er altså tale om konventioner som præciserer hvordan man omgås begreberne vækstrate og division, snarere end et egentligt begrebsindhold.

Tilsvarende kan nævnes det forhold at ”5 3/7” betyder ”5 + (3/7)” og ikke ”5 · (3/7)”. Ligeledes at ”retvinklet trekant” er et matematisk begreb, mens navngivningen af siderne (katete hhv. hypotenuse) er en konvention. Identitetsbidrag som søger at klargøre og aktivere sådanne ”aftaler” siges således at have tyngde i konventionskendskab.

Til de fire sidste tyngdepunkter i teori-dimensionen knytter sig altså nogle formelle sider af matematik. Det gælder ”bevis” til ræsonneret retfærdiggørelse, ”sætning” til teoriforståelse, ”definition” til begrebsforståelse og ”navngivning og notation” til konventionskendskab. Men til hvert af disse tyngdepunkter hører altså også en hel stribe af mere uformelle bidrag, som almindeligvis ikke ekspliciteres ved en formel etiket.

3.6.3 Anvendelses-dimensionen

Anvendelses-dimensionen er det aspekt af matematikfaget, som omhandler omgang med ikke-matematiske objekter, under anvendelse af matematiske metoder. Et *ikke*-matematisk objekt er principielt set negativt defineret som et objekt der *ikke* er *matematisk*. Denne afgrænsning er i princippet lige så vanskelig som afgrænsningen af et matematisk objekt. Men i praksis er den nemmere, fordi hovedparten af ikke-matematiske objekter er meget nemme at genkende som sådanne.

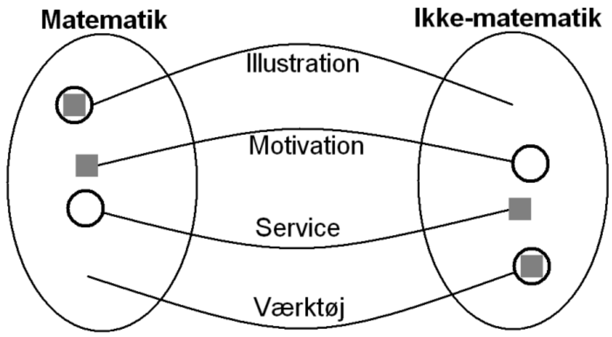
Principielt set er anvendelses-dimensionen på færde i ethvert identitetsbidrag som refererer til ikke-matematiske objekter. Tyngdepunkterne for dimensionen handler således ikke om at afgrænse hvad der forstås ved *ikke*-matematiske objekter, men snarere hvilken type af omgang der er med sådanne. Her vil vi skelne identitetsbidragene efter den type af relation mellem matematik og ikke-matematik som de repræsenterer. Der opstilles i alt fire tyngdepunkter for dimensionen:

- Illustration
- Motivation
- Service
- Værktøj

De to første tyngdepunkter er kendetegnet ved at matematik dominerer i relationen med ikke-matematik. Relationen etableres så at sige af hensyn til matematikken. For de to sidste tyngdepunkter gælder omvendt at ikke-matematikken er dominerende. Distinktionen mellem de enkelte tyngdepunkter afhænger af hvordan dominansforholdet afklares. Relationerne er skitseret på figur 3.1.

For *illustration* gælder at relationen domineres entydigt af matematikken. Indholdet såvel som de rammer indholdet formes af, styres af det matematiske. Ikke-matematikkens deltagelse underordnes således helt de behov der måtte være matematisk set. For *motivation* gælder derimod, at indholdet tegnes af matematikken, men inden for rammer styret af det ikke-matematiske. Det vil sige at den grundlæggende dagsorden sættes af det matematiske, men rammerne for hvordan dagsordenen udfoldes skal være meningsfuld for den ikke-matematiske kontekst.

For *service* gælder omvendt at indholdet styres af det ikke-matematiske, men inden for rammer sat af matematikken. Indholdet skal altså være af reel interesse for det ikke-matematiske, men udfoldelsen af dette sker inden for matematikkens rammer. For *værktøj* gælder denne begrænsning ikke. Her sættes både indhold og rammer af det ikke-matematiske og matematik indgår i det omfang det bidrager til det i øvrigt ikke-matematiske. Men matematikken leverer altså ikke nogen begrænsning af indholdet i det beskrevne bidrag.



Figur 3.1: Dimensionerne på anvendelses-aksen beskriver relationer mellem matematik og ikke-matematik.

De givne definitioner er ret abstrakte. En måde at konkretisere på, kan være at begrunde de navne som tyngdepunkterne har fået. Med *illustration* tænkes på en relation hvor det ikke-matematiske alene har til formål at illustrere matematiske pointer. Æbler og pærer kan gøre tal mere begribelige. Krukker med farvede kugler kan gøre sandsynligheder mere begribelige. En hastighed kan illustrere en differentialkvotient. Og problemer med ukendte aldre forbundet af bestemte informationer, kan gøre talteori mere begribeligt. Det ikke-matematiske spiller altså ingen styrende rolle for identitetsbidragets udformning, men må tilpasse sig matematikkens behov fuldt ud.

Med *motivation* menes at grundpointen er af matematisk art og at indholdet af identitetsbidraget således styres af denne pointe. Pointens udfoldelse begrænses imidlertid af nogle rammer sat af den ikke-matematiske kontekst. De informationer, spørgsmål, mv. der er til rådighed skal være meningsfulde, så anvendelsen ikke fremstår kunstig. Det kan f.eks. handle om at en funktion beskriver en meningsfuld sammenhæng og at der skal stilles meningsfulde spørgsmål til funktionen, selvom det oplagt er studiet af funktionen som er i centrum. Begrundelsen for at have en kontekst vil ofte være, at det motiverer arbejdet med at lære matematik.

For s*ervice* er det den ikke-matematiske kontekst der styrer indholdet. Informationer, spørgsmål, mv. skal være autentiske for konteksten, forstået således at der er tale om ikke bare meningsfulde spørgsmål, men også at løsningen af problemstillingen simulerer noget autentisk. Til gengæld sætter matematikken begrænsningen ved, at spørgsmål og løsningsproces skal være af matematisk art. Der er så at sige tale om at matematik *servicere* noget ikke-matematisk. Eller at noget ikke-matematisk rekvirerer en service fra matematik i form af besvarelser på spørgsmål af matematisk art. F.eks. statistisk behandling af samfundsfagligt relevante data.

For *værktøj* styres indholdet af den ikke-matematiske kontekst, som tillige selv sætter rammerne for hvordan indholdet kan udfoldes. Her tages altså ikke hensyn til at problemstillingen behandles inden for rammerne af en bestemt fagtradition. Matematikken må indgå i det omfang den har noget at bidrage med og faglig omgang med det ikke-matematiske er en uundgåelig del af det. Navnet *værktøj* er således valgt, fordi matematik bliver til indhold i en værktøjskasse der kan findes frem i enhver situation og hvor værktøjsbrugeren selv må afklare hvilke dele af situationen der håndteres bedst med værktøjet. Det kan eksempelvis være problemstillingen "hvor langt væk er horisonten".

Det er nu oplagt at spørge om i hvilken forstand disse fire begreber hænger sammen med andre begrebsapparater inden for anvendelse af matematik, herunder hvorfor disse ikke er tilstrækkelige. I første omgang modelleringscirklen (se figur 2.2 samt Jensen (2012)). Her vil tyngdepunkterne illustration, motivation og service almindeligvis være centreret omkring den delproces der kaldes *matematisk analyse*, evt. suppleret af matematisering og fortolkning. Fokus kan også være på de to sidstnævnte processer, men det vil nok være sjældent. Afgørende er at processerne *motivering* og *systematisering* ikke er substantielt repræsenteret. For tyngdepunktet værktøj er det derimod afgørende at *systematisering* – og gerne *motivering* og *procesevaluering* – er repræsenteret.

I anden omgang kan begreberne holdes op imod graden af *autenticitet*, som den diskuteres af Palm (2004). Her vurderes en opgave på om den inden for en række forskellige aspekter simulerer en virkelig begivenhed ('real life event') med "passende" nøjagtighed ('fidelity'). De to første aspekter er begivenheden ('event') selv samt det eller de spørgsmål ('questions') der stilles. Hvis et af disse aspekter vurderes ikke at være egentlige simuleringer, er der tale om *illustration*.

Er der tale om passende simulering af begivenhed og spørgsmål, samt af formålet med besvarelsen ('purpose in the figurative context') og af eksistensen af tilgængelige informationer og data, så vil opgaven være af *service*-arten. For *motivation* gælder altså at det forudsætter passende simulering af begivenhed og spørgsmål, men ikke af de to andre nævnte aspekter.

Modelleringscirklen kan altså skelne værktøj fra de tre øvrige tyngdepunkter og disse tre kan skelnes mellem af autenticitets-begrebet. For værktøj gælder at det ikke forholder sig til autenticiteten af de forskellige aspekter. Almindeligvis vil en opgave hvor den ikke-matematiske kontekst styrer, fremstå autentisk inden for alle eller de fleste aspekter, men det er dybest set ikke det afgørende for om et identitetsbidrag har sin tyngde der.

To sidste bemærkninger til anvendelses-dimensionen er, at for det første fremstår de fire tyngdepunkter gensidigt udelukkende, men principielt er der ikke noget til hinder for, at et identitetsbidrag har tyngde i flere af dem. Og for det andet fremstår de i deres definition meget knyttet til opgaver, men i praksis finder de en tilsvarende anvendelse på eksempler, tekststykker i bøger og andre former for manifestationer af matematikfaget.

3.6.4 Meta-dimensionen

Meta-dimensionen er det aspekt af matematikfaget, hvor faget i sig selv bliver gjort til genstand for et studie, almindeligvis involverende metoder fra andre fag. Det kan f.eks. være fag som historie, filosofi, kommunikation og sociologi. Som objekt er matematik i sig selv naturligvis et ikke-matematisk objekt. Men fordi fagets egen rolle i metastudier ikke er at levere metoder til studier af et ikke-matematisk objekt, men snarere dels at være objektet, dels at rumme viden om og indsigt i objektet, så har denne dimension en anden karakter, end anvendelses-dimensionen.

Meta-dimensionens nuancering i tyngdepunkter har således at gøre med hvad det er for en type refleksion over faget der er på færde. Overordnet set vil der – med inspiration fra Jensen (2010a) – blive skelnet mellem tre tyngdepunkter:

- Intern refleksion
- Videnskabsteori
- Samfundsfunktion

Med *intern refleksion* menes problemstillinger der meta-reflekterer over faget i sig selv. Det kan være historiske spørgsmål, som hvordan tallet ”π” som begreb blev til. Det kan omhandle de samfundsmæssige rammer det blev til i, de konkrete personer der skabte det og den begrebsmæssige udvikling. Hovedsagen er at et udsnit af matematikken tages under behandling med historiske metoder. Der kan også være tale om mere filosofiske spørgsmål, som ”hvad er et matematisk objekt” og ”hvilke erkendelser kan vi opnå om matematiske objekter”. Eller kommunikationsmæssige spørgsmål, som hvordan man formidler matematisk stof – f.eks. fraktal-begrebet – til en bestemt målgruppe, f.eks. den brede offentlighed.

Videnskabsteori er en refleksion over den særlige rolle, som matematik spiller i videnskaben, særligt naturvidenskaben. Hvad er det for indsigter der åbnes for, når matematikken bliver til en del af en videnskabelig gren. Hvad betød f.eks. infinitesimalregningen for teoridannelsen over planetbevægelser? Hvilken erkendelsesmæssig status har det for en videnskab, at dens resultater opnås med hjælp fra matematikken. Kan man f.eks. stole på økonomiske modeller?

Hvor det foregående tyngdepunkt handlede om matematiks snævre rolle i videnskaben, så handler s*amfundsfunktion* om fagets bredere rolle i udviklingen af samfundsformer, herunder kultur, økonomi og teknologi. Eksempler på sådanne problemstillinger kan være matematikkens betydning for skibssejlads (f.eks. astronomisk navigation), om matematikkens betydning for krigsførelse, om matematikkens rolle i forskellige antikke samfund, f.eks. det egyptiske overfor det græske, osv.

Oplagt er det, at disse tre aspekter ikke er gensidigt udelukkende. Det vil f.eks. i det historiske studie af et udsnit af matematikken være oplagt også at kigge på, hvad denne udvikling havde af betydning i videnskab og samfund. Ligeledes vil studier af matematikkens rolle i antikke samfund næppe kunne undgå at berøre fagets historie.

Det skal som afsluttende pointe her siges, at meta-dimensionen ikke er tillagt nogen meget afgørende placering i denne afhandling, hvorfor behandlingen her er kortfattet.

3.7 Opsummering: Begrebsskelet

Målet for dette kapitel var at afklare de begreber, som afhandlingens analyser baserer sig på og dermed besvare det første af afhandlingens tre delspørgsmål om, hvad der skal forstås ved en "identitet for matematikfaget i gymnasieskolen". Overordnet set er definitionen:

> *Et helhedssyn på hvilke objekter og problemstillinger der kan behandles selvstændigt i faget.*

Det blev endvidere afgrænset, at en sådan fagidentitet kan leve på mange forskellige typer af domæner, hvoraf nogle var "mennesker" mens andre var "menneskeprodukter", uden at domænetypen påvirker karakteren af selve fagidentiteten. Fagidentiteten er så at sige samme objekt, uanset hvilket domæne den eksisterer på. Derfor kan der sammenlignes identiteter på tværs af domæner. Overordnet set blev der identificeret tre klasser af domæner, som der vil være særligt fokus på:

- Systemet
- Lærebøger
- Undervisere

Af metodologiske grunde defineredes tillige et *identitetsbidrag*, som den mindste bestanddel af et domæne i forhold til dettes fagidentitet. Det vil sige et atom, som ikke meningsfuldt kan opdeles i mindre bestanddele, der hver især kan analyseres med identitetsbegrebet. Pointen i at tale om sådanne bidrag er, at en analyse af fagidentiteten på et specifikt domæne, må have form af en opsummering af en række analyser af sådanne atomer. Objektet er ikke tilgængeligt for os i sin helhed.

Den anden forudsætning for "at kunne se en fagidentitet", er at have udvalgt de karakteristika der skal kigges efter. Dette er ikke givet som en objektiv og indiskutabel ting, men som et til lejligheden valgt begrebssæt. I denne afhandling vil en fagidentitet overordnet blive beskrevet som udspændt af en *i*-, *med*- og *om*-dimension, som kan have forskellig tyngde. Til at nuancere dette billede, vil hver dimension blive beskrevet med et sæt af *tyngdepunkter*, som fra identiet til identitet kan have varierende tyngde. Det valgte sæt af tyngdepunkter er opsummeret i følgende oversigt:

***I*-dimension**	***Med*-dimension**	***Om*-dimension**
a) Færdighedstræning	i) Illustration	r) Intern refleksion
b) Problemløsning	j) Motivation	s) Videnskabsteori
c) Ræsonneret retfærdiggørelse	k) Service	t) Samfundsfunktion
d) Teoriforståelse	l) Værktøj	
e) Begrebskendskab		
f) Konventionskendskab		

Ud fra det opstillede begrebsapparat, kan der nu analytisk konstrueres nærmest et kontinuum af fagidentiteter, som hver især har fokus på forskellige forhold. Grundpåstanden i denne afhandling er, at ingen af disse identiteter har nogen særlig ret til at hævde at være mere rigtig end andre. Der er netop tale om *identiteter*, ikke *naturer*, hvorfor det i hovedsagen er et kvalificeret synspunkt hos relevante fagpersoner.

4 Metode: Hvordan analyseres ”fagidentiteter for matematik i gymnasieskolen ”

Dette kapitel vil udvikle og diskutere en metode til at analysere ”fagidentiteter for matematik i gymnasieskolen”. I foregående kapitel blev det søgt klargjort hvad en sådan fagidentitet er for en størrelse, hvor man kan finde den og hvilke nuancer der i denne afhandling er valgt til at beskrive forskellige eksemplarer. Formålet med dette er dels at kunne detektere hvilke fagidentiteter der findes i den danske gymnasieskole, dels at diskutere i hvilket omfang disse kan siges at dominere.

For at kunne detektere en fagidentitet kræves en eller flere metoder. Metoderne må vælges afhængigt af på den ene side den domæneklasse hvor på fagidentiteten skal detekteres, på den anden side efter hvad der praktisk lader sig gøre inden for afhandlingens rammer. Kapitlet har således til formål at gennemgå de konkrete metoder domæne for domæne, med særligt fokus på begrundelserne for valget af metode – dvs. metodologien. I forlængelse heraf fremstilles de praktiske forhold omkring benyttet empiri. Endelig vil grundlaget for den perspektiverende diskussion blive berørt.

4.1 Generelle metodologiske refleksioner

Før de mere konkrete metoder diskuteres, vil der i dette afsnit blive givet en mere principiel diskussion af grundlæggende metodologiske spørgsmål i matematikdidaktik. Dette er ment som en samlet præsentation af tankerne bag den udviklede metode, som de enkelte mere konkrete afsnit sidenhen kan trække på. Præsentationen vil falde i tre dele: For det første en diskussion af hvilken karakter viden om matematikdidaktiske sagsforhold har, samt af karakteren af den proces der leder frem til det. For det andet en mere generel indplacering i forhold til dominerende skoler. Og endelig en diskussion af de mere konkrete værktøjer til at søge viden med.

4.1.1 Karakteren af matematikdidaktisk viden

Viden defineres her som en relation mellem et *subjekt* og et *objekt* (i ordets bredeste betydning), som indebærer at subjektet *ved noget om* objektet. Dette ”noget” er en epistemisk størrelse, som eksisterer i subjektets bevidsthed, med deraf følgende uklarheder. Viden kan produceres og omformes ad to veje. For det første *empirisk* ved at interagere med objektet, for det andet *analytisk* ved at slutte fra det der allerede vides. Dertil kommer at viden kan gøres til genstand for kommunikation mellem to subjekter, ved at den der har viden *koder* denne (f.eks. med sprog) og den der ønsker at opnå viden *afkoder* det kodede. Dermed kan viden *reproduceres*. Reproduktionsprocessen betyder, at den reproducerede viden kan være mere eller mindre identisk med den producerede.

Viden kan være *sand*, *falsk* eller et sted i spektret mellem disse to poler. Det kan f.eks. være delvist, sand, delvist falsk og blandinger af disse positioner. I videnskabelige sammenhænge søges *sandest* *mulig viden* om objekter fra *virkeligheden*. Sidstnævnte er ikke specielt veldefineret, men refererer her til menneskenes fælles referenceramme (sammensat af "virke" og "lighed"). I matematikdidaktikken søges så at sige efter sandfærdig viden om matematikundervisning som fænomen i virkeligheden. Det være sig læring af matematik, undervisning i matematik og mere principielle synspunkter på fagets indhold, fundament og rolle, samt sammenhængene mellem disse tre "hjørner" af den fagdidaktiske trekant (Winsløw 2006, s. 16).

Studierne af disse fænomener har den særlige karakter, at de konkrete studieobjekter sjældent er umiddelbart tilgængelige for direkte observation. At noget tillært faktisk eksisterer som viden og kompetence hos et menneske er oplagt. Og at læringsprocessen faktisk har fundet sted er lige så oplagt. En forestilling om faget er oplagt et objekt som eksisterer i et individs bevidsthed. Og antagelsen i denne afhandling er, at hvor faget manifesterer sig, findes oplagt en fagidentitet. Men ingen af disse eksisterende objekter kan *i sig selv* observeres direkte.

Hvad man kan observere er *data*, som før det indsamles må *konstrueres* så det forventes at afspejle interessante egenskaber ved det udsnit af virkeligheden vi ønsker at observere (med inspiration fra Mason (2002)).. Den viden vi opnår, er så at sige viden om data, som kun kan siges at afspejle viden om virkeligheden, hvis vores data er konstrueret på passende vis (se figur 4.1). Det rejser en lang række praktiske erkendelsesmæssige problemer. Dels hvilke data der kan siges at repræsentere det virkelige, men også på hvilke måder data kan konstrueres. Her er en særlig problemstilling det forhold, at data næsten altid må konstrueres i vekselvirkning med virkeligheden, hvorfor konstruktionsprocessen påvirker den virkelighed der undersøges.

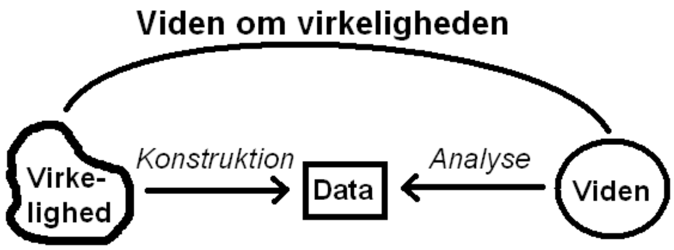


Fig. 4.1: Viden om virkeligheden forudsætter to processer.

Dette giver anledning til at definere tre principielle positioner, som denne afhandling lægger afstand til. For det første en *radikal konstruktivisme*, som hævder at der ikke findes anden virkelighed, end den vi konstruerer i form af data. For det andet en *naiv realisme*, som hævder at data er suget ud af virkeligheden, hvorfor studiet af data er et studie af virkeligheden. For det tredje *agnosticisme*, hvor de erkendelsesmæssige problemer fører til konklusionen, at viden om virkeligheden ikke kan opnås.

Denne afhandling placerer sig i en *pragmatisk kritisk realisme*. "Realisme" fordi det antages at virkeligheden faktisk eksisterer med selvstændig essens, uafhængigt af om den søges erkendt eller ej. "Kritisk" fordi den gør sig bevidst om, at viden opnås ved analyse af data, som først skal konstrueres. Konstruktionsprocessen må så at sige indgå i arbejdet med at konkludere. "Pragmatisk" fordi det til trods for principielle og praktiske erkendelsesmæssige problemer, grundlæggende set antages, at man med omhu og omtanke faktisk opnår relevant og sandfærdig viden om virkeligheden.

4.1.2 Teori og "framework"

Når man under arbejdet med en matematikdidaktisk afhandling kommer i kontakt med andre forskere, undgår man sjældent spørgsmålet: »What is your theoretical framework?«. Hvilket teoriskelet er arbejdet baseret på. I de store linjer kan dette ofte koges ned til et valg mellem to skoler. På den ene side den "konstruktivistiske", som med rødder hos Piaget hævder at læring først og fremmest er en individuel proces, hvor det lærte konstrueres i hovedet på den lærende. På den anden side den "socio-kulturelle", som med rødder hos Vygotski hævder, at læring først og fremmest er en social proces, hvor individet socialiseres ind i en kultur (se f.eks. Cobb (2007)).

Cobb (2007, s. 28) udvider billedet til fire perspektiver: 1) Eksperimentel psykologi, 2) kognitiv psykologi, 3) sociokulturel teori og 4) udbredt ('distributed') kognition. Samtidigt foreslår Cobb at disse perspektiver opfattes som lapper i et teori-kludetæppe ('bricolage'), frem for som konkurrerende positioner. Cobb's grundpointe er således, at hver teoribygning har sine muligheder og begrænsninger. Dette synspunkt tilslutter denne afhandling sig.

Når teorierne er vigtige metodologisk set, er det fordi en hel del forskning tager et så grundlæggende afsæt i en teori, at der kan tales om et *teori-skelet* ('theoretical framework'). Et sådan valg fører en række metodologiske konsekvenser med sig. Lester (2005) diskuterer sådanne teori-skeletter (med inspiration fra Eisenhart 1991) og peger på fire svagheder ved dem: 1) De fører ofte til at resultater gives "per dekret", frem for med evidens. 2) Data mister "kontekst" når de "rejser fra situation til teori". 3) Teori-baserede standarder er ikke nyttige i daglig praksis. 4) Teori-triangulering umuliggøres, når forskning inddæmmes af én enkelt teori.

Som modsvar til teoretisering, peger Lester på fremkosten af *praksis-skeletter* ('practical frameworks'). Her lægges fokus på problemer af typen "hvad virker" og på dem som er "direkte involveret". Svagheden ved et praksis-skelet er først og fremmest deres manglende generaliserbarhed udover den konkrete kontekst det er udfoldet i. Spørgsmålet om teori- overfor praksis-skeletter kan karikeret beskrives som en diskussion om, hvor vidt der skal navigeres alene ved at se på stjernerne på himlen eller på fiskene i vandet.

Lesters anbefalede løsning, er så at sige at holde fokus på landskabet og søge hjælp hos stjernerne og fiskene når det er nødvendigt. Med reference til Eisenhart, kalder han det for et *begrebs-skelet* ('conceptual framework'). Det fremhæves at et begrebs-skelet har fokus på *retfærdiggørelse* ('justification'), modsat teori-skelettets fokus på *forklaring* ('explanation'). Grundtanken er så at sige at sammensætte skelettet om sit arbejde ud fra mere pragmatiske hensyn, trækkende på de forudgående teorier, begreber og resultater der passer til ambitionen. I den forstand ligger det i forlængelse af Cobb's anbefaling af et teori-kludetæppe, og således også i udgangspunktet for denne afhandling.

4.1.3 Valg af metoder

I det mere konkrete valg af metoder, vil det være nyttigt at inddrage to dikotomier. For det første dikotomien *kvalitativ* vs. *kvantitativ*, som handler om karakteren af den viden og indsigt som metoden fører frem til. Grænsen mellem de to typer er ikke fuldstændig veldefineret. Men Somekh et. al.

(2011a, s.3) beskriver kvantitativ forskning som søgen efter svar på ”hvad-”, ”hvor mange-” og ”hvornår”-spørgsmål, mens det kræver kvalitative metoder at opnå svar på ”hvorfor-” og ”hvordan”-spørgsmål. Mason (2002, s. 3-4) udpeger tre elementer i en løs definition af ”kvalitativ forskning”: 1) Omhandler hvordan den sociale virkelighed fortolkes, forstås, opleves og skabes. 2) Baseret på fleksible metoder til data-generering, følsomme overfor kontekst. Og 3) metodisk baseret på analyse, forklaring, argumenteren involverende kompleksitet, detaljer og kontekst.

Groft sagt baserer kvalitative metoder sig på dybdegående studier af få cases. Det giver fordelen af en grundig forståelse af casen, men besværliggør generalisering af resultatet til andre cases. Kvantitative metoder baserer sig på mere overfladiske studier af sammenlignelige egenskaber ved et stort ensemble af cases, vurderet efter veldefinerede kvalitative kategorier. Her er fordelen en mere præcis generalisering, som dog ikke nødvendigvis egner sig til at sige noget om de enkelte tilfælde.

Den anden dikotomi er *empirisk* vs. *analytisk*, som handler om karakteren af den måde slutninger retfærdiggøres på. Ved empiriske metoder søges slutninger retfærdiggjort i til formålet tilvejebragte data fra til formålet passende datakilder. Mason (2002, s. 52) formulerer seks kategorier af sådanne datakilder: 1) Mennesker, 2) organisationer og institutioner, 3) tekster, 4) omgivelser og miljøer, 5) objekter og artefakter samt 6) begivenheder. Ved analytiske[3] metoder søges slutninger retfærdiggjort, ved ræsonnementer over allerede accepteret indsigt i fænomenet.

Empiriske metoder har den fordel, at de henter deres begrundelse direkte fra det der skal sluttes omkring. Det vil i mange situationer være en forudsætning for overhovedet at kunne slutte noget. Begrænsningen opstår hvis der ikke er relevant data tilgængelig, fordi den ikke blev eller kunne indsamles. Analytiske metoder kan så at sige agere mere frit, men har ikke samme grad af evidens i sig, som empiriske (i hvert fald ikke uden for de eksakte videnskaber som matematik, fysik, mv.).

De to dikotomier kan lidt firkantet give anledning til en 2x2-matrix, hvor hver konkret metode kan indplaceres efter den type af indsigt hhv. retfærdiggørelse, som den baserer sig på. I praksis vil de fleste metoder dog rumme elementer af begge typer af hhv. indsigt og retfærdiggørelse. Med konkrete metoder henvises til eksempelvis *interviews*, *spørgeskemaer*, *dokumentanalyse*, *feltobservationer*, m.m. I de konkrete tilfælde skal den faktiske brug af disse tilpasses efter, hvilken type af indsigt hhv. retfærdiggørelse, som man ønsker.

4.2 Metode til analyse af ’systemet’

I dette afsnit vil de konkrete metodevalg i forhold til at analysere fagidentiteter hos *systemet* (jf. afsnit 3.4.2) blive diskuteret og den tilhørende empiri præsenteret. Systemet eksisterer konkret i form af regelsæt og beskeder som er *fælles* for alle de konkrete undervisningspraksisser inden for en given ramme. Dertil kommer en række personer, som på forskellig vis er involveret i at få denne fælles ramme til at fungere. Det er en grundlæggende antagelse for analysen, at der til et givet tidspunkt kun eksisterer *én* fagidentitet for *system*-domænet, som dog kan være ”uklar”.

[3] Her skal ”analytisk” ikke forveksles med det ”at analysere”. Også empiriske metoder kræver ”analyse”. Til en hvis udstrækning kan begrebsparret *empirisk-analytisk* sammenstilles med begrebsparret *induktiv-deduktiv*.

Der kan dog eksistere flere system-identiteter på tre måder. For det første ved historisk betragtning. På forskellige tidspunkter antager systemet forskellige identiteter. I denne afhandling vil der blive analyseret for historiske identiteter, idet en identitet formuleres som en opsamling på en længere tidsperiode. De centrale skel (defineret af reformer og formålsændringer) for gymnasial matematikundervisning de sidste ca. 100 år defineres af årstallene 1906, 1935, 1953, 1961, 1971, 1988 og 2005. Disse vil blive sammenfattet i fire perioder indenfor hvilke der ikke sker store ændringer i formålsbeskrivelsen: 1) 1935-1961, 2) 1961-1988, 3) 1988-2005 og 4) 2005-nu.

Den historiske dimension er vigtig af to grunde. For det første giver den anledning til at vise hvordan fagidentiteten kan forandre sig. Altså en eksemplificering af, at fagidentitets-begrebet faktisk beskriver forskellige ting. For det andet giver det viden til en analytisk diskussion af fagidentiteter på andre typer af domæner, specielt *undervisere* farvet af undervisningen på andre tidspunkter.

Udover det historiske, kan andre system-fagidentiteter findes hvis man ser på andre lande (både aktuelt og historisk). Og fagidentiteter kan også konstrueres analytisk ud fra begrebsapparatet. Disse to måder at definere system-fagidentiteter på, vil ikke finde udfoldelse i denne afhandling.

4.2.1 Metodologiske overvejelser

Studiet af *system*-domænet er oplagt et kvalitativt studie, fordi der kun er et system. Da vi ønsker at kunne anskue systemets forskellige indretninger over tid, vil det i praksis behandles som fire forskellige systemer, hvor der skal kunne laves sammenligninger på tværs. At studiet er kvalitativt udelukker naturligvis ikke at der kan tages kvantitative metoder i brug.

I første omgang forekommer det oplagt at opfatte studiet som en empirisk undersøgelse. Fagidentiteten er der (hhv. har været der), hvorfor den må kunne studeres som faktisk eksisterende objekt. De praktiske metoder til dette vil være studier af de produkter som systemet til forskellige tider har efterladt sig, samt kvalitative interviews med nøglepersoner i systemet. Produkterne kan være regler, vejledninger, opgaver, undervisningsmateriale, mv. Nøglepersoner kan være fagkonsulenter, ledere, medlemmer af diverse udvalg og kommissioner, mv.

Interessen her samler sig dog ikke om et meget detaljeret billede af systemets indre dynamik, men om det billede det tegner udadtil og som gør at systemet netop bliver noget ”fælles” for al undervisning. Dette er – sammen med prioriteringer af tid og plads – den væsentligste grund til at nøglepersoner ikke indgår som datakilde i det empiriske materiale. De datakilder (dvs. systemprodukter) der indgår i undersøgelsen bliver derpå delt ind i to typer, som analyseres hver for sig. Der bliver så at sige tale om at se genstanden fra to sider (en slags *triangulering*).

Den første type er de forudstyrende dokumenter. Det vil sige dokumenter som med deres ordlyd søger at styre indholdet af undervisningen før den er gennemført. Her er især tale om fagets styrende regelsæt (bekendtgørelse, læreplan, fagbilag, osv.), men det kan også være mindre forpligtende vejledninger, materialeeksempler, mv. Der vil altså være tale om en *dokumentanalyse*. Fokus er på at indplacere centrale tekst-stykker (identitetsbidrag) i forhold til begrebsapparatet. Der vil være mest fokus på formåls- og indholdsbeskrivelser (pensum) og mindre på f.eks. eksamensformer.

Den anden type er de bagudrettede dokumenter. Det vil sige dokumenter hvis formål det er at evaluere den foregåede undervisning. Her tænkes der primært på skriftlige eksamensopgaver, der er fælles for alle danske gymnasieelever, indenfor et bestemt fagligt niveau.

De forudstyrende dokumenter kan opfattes som erklæringer om, hvad systemet forestiller sig skal være identiteten på det udfoldede fag. Der er tale om hensigtserklæringer, hvis efterlevelse kun i stærkt begrænset omfang evalueres. De bagudstyrende dokumenter har en helt anden karakter, i det de for eleverne udgør den summative evaluering, som i sidste ende forventes at være hovedparten af elevernes egentlige formål med at følge undervisningen. Forberedelsen til denne evaluering bliver således stærkt dagsordensættende for undervisningen og dermed for fagidentiteten.

Denne pointe findes i literaturen som princippet »*what you assess is what you get*« (Niss 1992, s.3). Dette princip vil blive antaget som et aksiom for system-analysen. Det vil således være en grundlæggende antagelse, at eksamensopgaver er systemets mest betydelige styringsredskab, uanset om systemet selv tænker det sådan. Eksamensopgaver vil således blive opfattet som det væsentligste bidrag til systemets identitet, mens de forudstyrende dokumenter regnes for lettere bidrag.

Denne antagelse kan naturligvis diskuteres. Holm (2012) argumenterer således fra et praktikersynspunkt for, at den mundtlige eksamen – som i sit indhold er stærkt decentraliseret – og læreplanen er at ligestille med den skriftlige eksamen. Påstanden underbygges som sådan ikke. For denne afhandling vil det blive antaget, at Holm’s synspunkt er rigtigt fra et *underviser*synspunkt, men at fra et *system*synspunkt er mundtlig eksamen og læreplan mudret når det kommer til fælles indhold, mens skriftlige eksamensopgaver er meget klare.

Analysen af opgaverne er overordnet set en *dokumentanalyse*, som dog er en særlig genre, nemlig *opgaveanalyse*. Sådanne foretages mange steder og på mange forskellige måder i litteraturen. Her vil der være behov for en særlig variant der tager afsæt i begrebsapparatet fra kapitel 3. I forhold til *med*- og *om*-dimensionerne, er vurderingen af en opgave fastlagt af begrebernes indhold. For *i*-dimensionen vil der være en vis udfordring med at skelne mellem tyngdepunkterne, særligt distinktion mellem *færdighedstræning* og *problemløsning*. Der er derfor behov for at vurdere et vist antal opgavesæt tidsligt tæt på hinanden. I praksis vil det blive gjort ved at analysere tre eksamenssæt, fra tre på hinanden følgende år, i hver af de fire skitserede perioder.

4.2.2 Benyttet empiri

Den benyttede empiri vælges inden for de fire angivne perioder. Fra hver periode er således som empiri udvalgt toneangievende forudstyrende dokumenter samt tre eksamenssæt som eksempler på bagudstyrende dokumenter. For perioderne 1 og 2 sker der et skifte i de forudstyrende dokumenter undervejs, som gør at der er to sæt dokumenter medtaget. For periode 2 sker tillige et skifte i karakteren af de bagudstyrede dokumenter, som nødvendiggør at der er medtaget to gange tre eksempler på eksamenssæt. For periode 3 og 4 er der nogenlunde homogenitet i hele perioden og derfor kun et udvalg af både forud- og bagudstyrende dokumenter. Alle dokumenter er valgt, så de repræsenterer matematik på det til tidspunktet højeste eksisterende niveau.

Den benyttede empiri er sammenfattet i følgende skema:

Periode	**Forudstyrende dokumenter**	**Bagudstyrende dokumenter**
1935-1961	*Kgl. Anordning af 1935* *Bekendtgørelse af 1935* *Kgl. Anordning af 1953* *Bekendtgørelse af 1953.*	Eksamenssæt: Matematik I og II, maj-juni (den matematisk-naturvidenskabelige linje): 1951, 1952 og 1953
1961-1988	*Bekendtgørelse af 1961* *Vejledende bestemmelser af 1961* *Bekendtgørelse af 1971*	Eksamenssæt: Matematik I og II , maj-juni (matematisk-fysisk gren): 1969, 1970 og 1971 samt 1980, 1981 og 1982.
1988-2005	*Gymnasiebekendtgørelsen, maj 1999.*	Eksamenssæt: Matematik 3 årigt forløb til A-niveau, maj-juni (matematisk linje): 2000, 2001 og 2002
2005-	*Gymnasiebekendtgørelsen, juni 2010, bilag 35: "Matematik A – stx"* *"Matematik A – Stx Vejledning / Råd og vink", Gymnasieafdelingen 2010.*	Eksamenssæt: Matematik A-niveau, maj-juni: 2011, 2012 og 2013

4.3 Metode til analyse af 'lærebøger'

I dette afsnit vil metoder for analyse af fagidentiteter i *lærebogssystemer* blive diskuteret og benyttet empiri præsenteret. Et lærebogssystem er mere konkret tilgængeligt end 'systemet', idet lærebogssystemet eksisterer som et sæt af konkrete bøger. Hvor systemet eksisterer i kraft af en samling dokumenter, som kan udvælges på forskellig vis, så må det konkrete eksemplar af lærebogssystemet siges at eksistere "uforanderligt", så snart blækket er tørt fra trykkeriet. Det betyder ikke, at et lærebogssystem i mere generel forstand ikke udvikler sig fra udgave til udgave, men den konkrete udgave gør ikke. Og det er ganske præcist fastlagt hvilket tekstmateriale udgaven omfatter.

Et lærebogssystem er et menneskeprodukt, præcist som 'systemet' er det. Men hvor systemet kan siges at være en sejtflydende størrelse, der kan afhænge af de personer som er i det, må et lærebogssystem siges at være uafhængigt af sine producenter, så snart det ligger færdigtrykt. Det er med andre ord et helt størknet produkt. Det er altså unødvendigt at inddrage denne menneskelige baggrund i studiet af den til lærebogssystemet hørende fagidentitet, om end det kan åbne for visse indsigter og vinkler at gøre det. Afvejning af behov og tid betyder, at det ikke er sket i denne afhandling.

Også for lærebøgerne er det fundet relevant at se på dem i et historisk aspekt. Her er det ikke afgørende at se historisk på det, for at finde flere forskellige lærebogssystemer. Der eksisterer helt aktuelt en del forskellige lærebøger at undersøge. Det giver dog en større mangfoldighed af resultater at sammenligne på tværs af de i sidste afsnit omtalte fire perioder, da lærebøger fra samme periode har en del fælles træk. Dertil kommer også her pointen med, at den historiske indsigt kan bruges analytisk i en række diskussioner senere hen.

4.3.1 Metodologiske overvejelser

Studiet af forskellige lærebogssystemer kan gribes både kvalitativt og kvantitativt an. Her vil det blive gjort kvantitativt, baseret på forudgående analyser af kvalitativ art. Det vil det, fordi sammenlignelighed af resultaterne mellem de forskellige lærebogssystemer vægtes højt. Det er altså de principielle forskelle i termer af fagidentitets-begrebet som skal fremhæves, mere end det er dybdeinteressen for det enkelte systems mange unikke og spændende detaljer.

Overordnet set er der altså tale om *dokumentanalyse*. Det vil dog ske ved at der laves så ”homogene” udsnit af hvert dokument (dvs. lærebogssystem) som muligt. Pointen med et sådan udsnit er at se på fremstillingen af stof, som kan siges at være en fælles kerne mellem alle de undersøgte lærebogssystemer. Dermed forsvinder en del nuancer i form af eksempelvis tema-kapitler. Det skævvrider billedet af den enkelte lærebog i retning af de udvalgte kapitler. Omvendt betyder fokuseringen på lærebogssystemets fremstilling af det der opfattes som ”kernestoffet”, at man får et mere retvisende billede af den egentlige fagidentitet i lærebogssystemet, mens forskellige tillægskapitler i højere grad afspejler sekundære prioriteringer. De fire kapitler der vil være i fokus vil være:

1. Kapitel 1 i systemets første bog: Hvor starter systemet? Hvad er grundlaget?
2. Det første kapitel om *trigonometri*.
3. Det første kapitel om *funktioner*.
4. Det første kapitel om *differentialregning*.

Selve analysen udføres i udgangspunktet kapitelvis. Det sker konkret ved at vurdere teksten ud fra de opstillede begreber i bidder af passende størrelse. De skal være store nok til at have selvstændig mening og små nok til, at de ikke oplagt kan deles i mindre bidder. Hver bid regnes således for et identitetsbidrag og analysen af det enkelte kapitel sker ved at ”summere” vurderingerne af de enkelte bidrag. Den samlede vurdering af lærebogssystemet er således en kvalitativ sammenføjning af de enkelte analyserede kapitler, som suppleres af bemærkninger om almene træk ved systemet.

Udover tekstbidder har mange bøger også til det enkelte kapitel hørende opgaver og eksempler. Enten direkte i teksten eller i en selvstændig bog. Disse vil indgå som identitetsbidrag på lige fod med den øvrige tekst og vurderingen af dem vil ske efter en metode, der tilsvarer den beskrevet for eksamensopgaver i afsnit 4.2.1.

4.3.2 Benyttet empiri

Empirien for studiet af fagidentiteter i lærebogssystemer er naturligvis lærebogssystemerne selv og ikke andet. Der er valgt lærebøger som repræsenterer periode 1, 2 og 4. For perioderne 1935-1961 og 1961-1988 er valgt hhv. ”Andersen og Mogensen” og ”Kristensen og Rindung”, som var dominerende i de to perioder. I 80’erne dukker mange mindre systemer op. Dette forhold gør at der modsat de to forrige perioder ikke kan udpeges et enkelt meget udbredt og dominerende lærebogssystem. Fraværet af et sådan entydigt oplagt analyseobjekt har gjort - sammen med rent tidsmæssige overvejelser - at denne periode ikke indgår i analysen af lærebogsdomænet.

For den nyeste periodes vedkommende er der valgt de to lærebogssystemer som var mest dominerende ved påbegyndelsen af denne afhandling. Det drejer sig om Systimes "MAT" af Carstensen, Frandsen og Studsgaard og Gyldendals "Gymnasiematematik" af Clausen, Schomacker og Tolnø. De tre øvrige udbredte systemer: Frydenlunds "Matema10k" af Jensen, Jessen og Nielsen, HAX' "Vejen til matematik" af Nielsen og Fogh samt TRIP's bøger af Sloth, er fravalgt af tidsmæssige hensyn. Der er siden kommet en række af andre systemer til, men disse fem antages at være mest udbredte. I den spørgeskemaundersøgelse som er gennemført blandt matematiklærere som en del af denne afhandling (se afsnit 4.4.2) angav respondenterne følgende kendskab til bøgerne:

N = 199	**Kender godt**	**Skimmet**	**Hørt om**	**Ukendt**
Systime	54%	34%	11%	2%
Gyldendal	55%	28%	13%	4%
Frydenlynd	37%	41%	17%	6%
TRIP	34%	35%	23%	8%
HAX	34%	29%	24%	14%

Tabel 4.1: Underviseres kendskab til de fem udvalgte aktuelle lærebogssystemer

Muligheden for at angive andre lærebogssystemer blev kun benyttet af 22 respondenter, hvoraf kun 5 nævnte andre aktuelle systemer, mens de øvrige nævnte ældre systemer. Det virker altså rimeligt at antage at de fem systemer er mest udbredte, samt at systemerne fra Systime og Gyldendal er de allermest benyttede og derfor mest toneangivende for den aktuelle periode.

De analyserede uddrag af de aktuelle bøger er følgende:

System	**Beskrivelse**	**1. kapitel**	**Trigonometri**	**Funktioner**	**Differential-regning**
Systime Carstensen og Frandsen 2005/2010 Bog 1 i 2. udgave. Øvrige i 1. udgave.	3 grundbøger MAT A1-A3 til A-niveau 2 opgavebøger (AB1 og AB2) til både A- og B-niveau.	MAT A1 Kapitel 1: Tal- og bogstavregning (s. 7-46) Opgavebog AB1: s. 7-19	MAT A1 Kapitel 4: Trigonometri (s. 123-162) Opgavebog AB1: s. 47-63	MAT A1 Kapitel 8: Funktioner (s. 261-286) Opgavebog AB1: s. 91-103	MAT A2 Kapitel 3: Differentialkvotient (s. 85-108) Opgavebog AB2: s. 28-47) *Note 1.*
Gyldendal Clausen, Schomacker og Tolnø 2005 1. udgave	3 grundbøger. B1-B2 til A- og B-niveau samt A til A.-niveau. 3 arbejdsbøger B1, B2 og A. En til hver grundbog.	Arbejdsbog B1: Kapitel 1: Værktøjer og Kapitel 2: Øvelser til værktøjer (s. 6-45) *Note 2*	Grundbog B1: Kapitel 1: Geometri og trigonometri (s. 6-49) Arbejdsbog B1: s. 55-61og 85-87.	Grundbog B1: Kapitel 2: Variabelsammenhænge og funktioner. (s. 50-107) Arbejdsbog B1: s. 61-73 og 88-95.	Grundbog B2: Kapitel 1: Differentialregning (s. 6-49) Arbejdsbog B2: s. 21-30 og s. 61-66.

Note 1: Kapitel 3 hedder "Differentialkvotient" og efterfølges af kapitel 4: "Regneregler for differentialkvotienter"
Note 2: Grundbog 1 starter lige på med trigonometri. Grundlaget er således en "opsamling" i arbejdsbogen.

Udover disse to aktuelle lærebogssystemer, benyttes som sagt også to historiske lærebogssystemer. De benyttede uddrag er sammenfattet i følgende tabel (den præcise beskrivelse af hvilke udgaver af bøgerne der er brugt, findes i litteraturlisten):

System	**Beskrivelse**	**1. kapitel**	**Trigonometri**	**Funktioner**	**Differential-regning**
Systime Carstensen og Frandsen 2005/2010 Bog 1 i 2. udgave. Øvrige i 1. udgave.	3 grundbøger MAT A1-A3 til A-niveau 2 opgavebøger (AB1 og AB2) til både A- og B-niveau.	MAT A1 Kapitel 1: Tal- og bogstavregning (s. 7-46) Opgavebog AB1: s. 7-19	MAT A1 Kapitel 4: Trigonometri (s. 123-162) Opgavebog AB1: s. 47-63	MAT A1 Kapitel 8: Funktioner (s. 261-286) Opgavebog AB1: s. 91-103	MAT A2 Kapitel 3: Differentialkvotient (s. 85-108) Opgavebog AB2: s. 28-47) *Note 1.*
Gyldendal Clausen, Schomacker og Tolnø 2005 1. udgave	3 grundbøger. B1-B2 til A- og B-niveau samt A til A.-niveau. 3 arbejdsbøger B1, B2 og A. En til hver grundbog.	Arbejdsbog B1: Kapitel 1: Værktøjer og Kapitel 2: Øvelser til værktøjer (s. 6-45) *Note 2*	Grundbog B1: Kapitel 1: Geometri og trigonometri (s. 6-49) Arbejdsbog B1: s. 55-61og 85-87.	Grundbog B1: Kapitel 2: Variabelsammenhænge og funktioner. (s. 50-107) Arbejdsbog B1: s. 61-73 og 88-95.	Grundbog B2: Kapitel 1: Differentialregning (s. 6-49) Arbejdsbog B2: s. 21-30 og s. 61-66.

Note 1: Kapitel VIII hedder ”Trigonometriens elementer” og kapitel X: ”Trigonometriske Ligninger”.
Note 2: Kapitel VI hedder ”Reelle funktioner” og har tilhørende opgaver i opgavebogen s.87-93. Disse udelades her.

4.4 Metode til analyse af ’undervisere’

I dette afsnit vil metoder for analyse af fagidentiteter hos undervisere blive diskuteret og benyttet empiri vil blive præsenteret. Hvor såvel systemet som lærebøgerne er forholdsvist lettilgængelige størrelser, må de metodiske udfordringer i forhold til underviserne siges at være mere vanskelige. Et menneske kan ikke ”åbnes og læses” som en bog. Derfor bliver den proces hvor data konstrueres af meget afgørende betydning. Særlig svært er det, fordi selv det ”at spørge og få svar” ikke nødvendigvis giver en korrekt indsigt i den enkelte underviser. Hvad der faktisk foregår i hovedet på et menneske, er et meget svært tilgængeligt studieobjekt.

Hvis systemet er ”sejt-flydende” og et lærebogssystem ”størknet”, er et menneske ”let-flydende”. På forholdsvist kort tid kan objektet forandre sig, så selv en nok så solid metode til datakonstruktion vil give et andet resultat. Og selve den måde objektet undersøges på, kan påvirke datakonstruktionen. Eksempelvis kan det at man spørges om noget betyde, at man spontant svarer anderledes, end ens reaktionsmønster hvis man var stødt på noget tilsvarende i daglig kontekst. Også modsætninger mellem hvad man gør og hvad man synes man gør, samt kommunikationsproblemer – f.eks. forårsaget af forskellig forståelse af vigtige begreber – kan give misvisende data.

For underviserne er der kun fokus på den aktuelle periode. Fortidens undervisere er i sagens natur ikke tilgængelige for undersøgelser af nogen art. Det er naturligvis inden for visse rammer muligt at undersøge, hvad personer der var undervisere i fortiden mener i dag eller hvad de i dag mener at de mente engang. Men det er irrelevant for problemstillingen. Til gengæld bør populationen af matematikundervisere i det almene gymnasium være stor nok til, at der er mangfoldighed i resultatet.

4.4.1 Metodologiske overvejelser

Studiet af undervisere kræver i høj grad bevidsthed om hvorvidt der søges kvantitative eller kvalitative indsigter, uden at de to ting nødvendigvis udelukker hinanden. Det har været ønsket for denne afhandling at undersøge helhedsbilledet. Derfor er der i udgangspunktet benyttet kvantitative metoder på et kvalitativt grundlag. I det omfang kvalitative metoder er taget i brug, er det især for at kvalificere de kvantitative metoder.

Den centrale datakonstruktionsmetode for denne analyse, er en *spørgeskemaundersøgelse* gennemført blandt et repræsentativt udsnit af den samlede population af matematiklærere. For at minimere de grundlæggende problemer omtalt ovenfor, har der i spørgeskemaet først og fremmest været tænkt på *lakmus*-prøver. Det vil sige, at frem for at spørge direkte til hvad læreren selv synes at mene, konfronteres respondenten med en række situationer, som vedkommende må forholde sig til som matematikfagperson. Det bliver således en opgave for analysen at placere synspunktet i begrebsskelettet, snarere end respondenten. Overordnet set er spørgeskemaet konstrueret i fire ordnede dele:

1. Personlige spørgsmål (baggrundsdata og undervisning).
2. Opgavesyn (konfrontation med en række opgaver).
3. Syn på fagligt samspil (konfrontation med en række faglige samspil).
4. Fagkultur (hvordan opleves kulturen om faget).

Spørgeskemaet har været elektronisk og ”intelligent”, således at der er stillet forskellige uddybende spørgsmål til respondenten, afhængigt af hvad denne har svaret tidligere. Det giver mulighed for en mere kvalificeret forståelse af begrundelserne for at svare noget bestemt. Dertil kommer, at respondenten på stort set alle sider af spørgeskemaet har haft adgang til en kommentarboks, hvor tanker og forbehold har kunnet noteres. Disse kommentarer kan tillige bruges som *kvalitative* data.

Som kvalificering af spørgeskemaet, er der gennemført i alt ni semistrukturerede interviews. Fire er gennemført før spørgeskemaet blev udformet, mens fem er gennemført med personer der havde besvaret første udkast til spørgeskema i en pilotafprøvning. Udover at være et praktisk værktøj for spørgeskemaets tilblivelse, er de ni interview i sig selv også brugbar kvalitativ empiri for afhandlingens egentlige undersøgelser.

4.4.2 Benyttet empiri: Spørgeskema

Inviterede respondenter er udvalgt ved at udvælge et antal skoler, hvor alle der på skolen regnes for matematikundervisere indgik i gruppen. Af etiske grunde er kun skoler udvalgt, hvor skoleledelsen eller anden kompetent kontakt har givet tilladelse. Det har været målet at ca. en tredjedel af Danmarks 125 offentlige gymnasieskoler deltog. Da udvælgelsen havde til formål at sikre repræsentativitet, tildeltes hver skole tre parameterværdier:

Geografisk: 1-9 (første ciffer i skolens postnummer – dog således at skoler i Københavns og Frederiksberg Kommuner alle fik værdien 1).

Demografisk: Der tildeltes en af fire værdier til hver skole. Til brug for tildelingen benyttedes et befolkningstal for den by som skolen har adresse i. Befolkningstallet er fundet via Wikipedia.

H – Hovedstad: Svarende til region Hovedstaden fraregnet Bornholm og tillagt Roskilde
S – Storby: Svarende til et befolkningstal på over 70.000 (Århus, Odense, Aalborg og Esbjerg).
P – Provins: Svarende til et befolkningstal på 10-70.000.
L – Land: Svarende til et befolkningstal på under 10.000.

Tilfældigt: Alle skoler tildeltes en tilfældigt genereret parameterværdi.

Skolerne sorteredes i første række efter demografi, anden række geografi og tredje række efter den tilfældige parameter. Herefter valgtes hver tredje skole på listen til at blive kontaktet i første runde. I alt var det 42 skoler der blev spurgt i første runde. Af disse svarede 23 positivt. For de øvrige 19 skoler udtoges næste skole på listen (eller den foregående, hvis den var geografisk og demografisk oplagt mere passende) til en anden runde. I anden runde blev 18 gymnasier kontaktet (en skole måttet udsættes). Af disse svarede 10 positivt. Efter samme mønster kontaktedes nu i tredje runde 9 skoler. Af disse svarede 7 positivt. I alt blev altså kontaktet 70 skoler hvor af 40 meldte sig til, 13 afviste deltagelse og 17 ikke svarede.

Det samlede skolebillede holdt op imod de to parametre fremgår af tabel 4.2a og 4.2b (idet demografi-parameteren T angiver test-skoler, som ikke indgik i den adspurgte population). Overordnet set er populationen altså ud fra de opstillede kriterier valgt ganske repræsentativt. Når én enhed udgør 2,5%-point i den udvalgte population, kan større præcision ikke forventes.

Samlet skole-population

	H	**S**	**P**	**L**	**T**	∑	%
1	9	0	0	0	0	**9**	7%
2	19	0	0	0	0	**19**	15%
3	9	0	1	0	0	**10**	8%
4	2	0	10	4	1	**17**	14%
5	0	4	3	4	0	**11**	9%
6	0	2	8	4	0	**14**	11%
7	0	0	10	3	0	**13**	10%
8	0	6	10	4	0	**20**	16%
9	0	4	4	4	0	**12**	10%
∑	**39**	**16**	**46**	**23**	**1**	**125**	
%	31%	13%	37%	18%	1%		

Tabel 4.2a: Alle skoler efter geografi og demografi.

Tilmeldt skolepopulation

	H	**S**	**P**	**L**	∑	%
1	4	0	0	0	**4**	10%
2	7	0	0	0	**7**	18%
3	3	0	0	0	**3**	8%
4	0	0	4	2	**6**	15%
5	0	1	1	1	**3**	8%
6	0	0	2	1	**3**	8%
7	0	0	4	1	**5**	13%
8	0	2	3	0	**5**	13%
9	0	2	1	1	**4**	10%
∑	**14**	**5**	**15**	**6**	**40**	
%	35%	13%	38%	15%		

Tabel 4.2b: Tilmeldte skoler efter geografi og demografi.

For de tilmeldte 40 skoler indsamledes e-mailadresser på alle matematikundervisere, samt via skolens hjemmeside, Lectio-side og lignende, informationer om den enkelte lærers øvrige undervisningsfag. Der udsendtes således invitationer til 509 undervisere, hvor af 5 udgik på grund af ugyldige adresser. Af de 504 inviterede respondenter svarede 135 (27%) på hele spørgeskemaet, 112 (22%) svarede på noget af spørgeskemaet og 257 (51%) åbnede det aldrig. Kravet for at indgå i respondentpopulationen var, at man besvarede hele 1. del. I alt blev således 305 (61%) af de inviterede frasorteret, mens respondentpopulationen blev på 199 (39%).

De 504 inviterede lærere og 305 frasorterede, fordelte sig geografisk og demografisk som vist i tabel 4.3a, 4.3b og 4.3c. Som det ses, er den demografiske og geografiske repræsentation af frasorterede (og dermed også blandt deltagende), tilfredsstillende.

Samlet tilmeldte-population

	H	L	P	S	∑
1	47	0	0	0	47
2	96	0	0	0	96
3	41	0	0	0	41
4	0	11	53	0	64
5	0	4	15	15	34
6	0	7	23	0	30
7	0	7	55	0	62
8	0	0	49	27	76
9	0	8	11	35	54
∑	**184**	**37**	**206**	**77**	**504**

Tabel 4.3a: Antal inviterede lærere

Frasorteret

	H	L	P	S	∑
1	24	0	0	0	**24**
2	64	0	0	0	**64**
3	25	0	0	0	**25**
4	0	6	29	0	**35**
5	0	3	7	10	**20**
6	0	2	17	0	**19**
7	0	6	33	0	**39**
8	0	0	27	13	**40**
9	0	6	8	25	**39**
∑	**113**	**23**	**121**	**48**	**305**

Tabel 4.3b: Antal frasorterede lærere

Frasorteret andel

	H	L	P	S	∑
1	51%				**51%**
2	67%				**67%**
3	61%				**61%**
4		55%	55%		**55%**
5		75%	47%	67%	**59%**
6		29%	74%		**63%**
7		86%	60%		**63%**
8			55%	48%	**53%**
9		75%	73%	71%	**72%**
∑	**61%**	**62%**	**59%**	**62%**	**61%**

Tabel 4.3c: Frasorterede i andele.

Ser man på frasorteringsandelen på de enkelte skoler som deltager, kan man opgøre hvordan skolerne fordeler sig. Som det ses af tabel 4.4, så ligger ca. to tredjedele af skolerne i det interval, hvor den gennemsnitlige 61% findes. Mindsteværdien er 22% og største værdien 87%. På ingen skoler svarede altså ingen eller alle lærere.

Frasortering	#	%
0-25 %	1	3%
25-50%	8	20%
50-75%	26	65%
75-100%	5	13%
Samlet	40	100%

Tabel 4.4: Frasorterede på skoler

Det er endvidere interessant at undersøge hvordan lærerne fordeler sig i forhold til deres øvrige undervisningsfag. Derfor samles fagene i følgende fire hovedområder:

Hovedområde:	**Fag:**
Naturvidenskab	Fysik, Kemi, Biologi, Datalogi, Astronomi, Naturgeografi, Bioteknologi, Naturfag, Fysik-Kemi.
Samfundsvidenskab	Samfundsfag, Erhvervsøkonomi
Humaniora/sprog	Filosofi, historie, dansk, psykologi, Religion, Oldtidskundskab, TOK, Latin, Engelsk, Tysk, Fransk, Spansk, Russisk.
Kreativt	Idræt, musik, mediefag, billedkunst.

Derpå defineres der følgende syv fagkombinationsgrupper af matematiklærere:

- ”Ren mat”: Personer uden andet fag end matematik.
- ”Fysik”: Fagkombination hvori faget fysik indgår.
- ”Nat (÷fys)”: Fagkombination hvor fysik ikke indgår, men mindst et andet naturfag gør.
- ”÷Nat”: Fagkombination hvor der indgår andre fag end matematik, men intet naturfag.

- ”Samf.”: Fagkombination hvor der indgår mindst et samfundsfagligt fag.
- ”Hum/Sprog”: Fagkombination hvor der indgår mindst et humanistisk eller sprogligt fag.
- ”Krea”: Fagkombination hvor der indgår mindst et kreativt fag.

De første fire grupper er de væsentligste, i det den enkelte lærer er medlem af én og kun én af disse grupper, mens de tre sidste ”går på tværs”. Der er ikke fundet tal for den nationale fordeling på fagene. Men for de inviterede og frasorterede lærere ses fordelingen i tabel 4.5. Det ses at frasorteringen er størst blandt lærere uden andet fag eller med fysik, mens den er mindst for lærere med ikke-naturvidenskabelige fag Afvigelsen er ikke voldsom, men indgår som vilkår i det videre arbejde.

	Inviterede	**% af pop**	**Frasorteret**	**% af invit.**
Ren mat	**60**	**12%**	**41**	**68%**
Fysik	**233**	**46%**	**154**	**66%**
Nat (÷fys)	**102**	**20%**	**56**	**55%**
÷Nat	**109**	**22%**	**54**	**50%**
Samf	15	3%	5	33%
Hum/sprog	65	13%	38	58%
Krea	43	9%	20	47%
Population	**504**	**100%**	**305**	**61%**

Tabel 4.5: Fordeling af inviterede og frasorterede lærere på fagkombinationsgrupper.

Sammenholder man for respondenterne den forlods fundne fagkombination, med den respondenten selv angiver i besvarelsen, ser man visse afvigelser. Den eneste markante er for gruppen ”Ren mat”, hvor der forlods var 19 lærere i respondentgruppen, men kun 10 ud fra lærernes eget svar. Dette handler om at forlodstallet behæftes med fejl, hvis informationer mangler. Og mangel på information, forøger antallet i gruppen ”Ren mat”. I den videre bearbejdning af selve besvarelserne, er det imidlertid kun respondentens eget svar der tæller.

Af de 199 respondententer, svarede 135 (26% af hele populationen) på hele spørgeskemaet. I tabel 4.6 ses sammensætningen af den respondentpopulation som har færdiggjort spørgeskemaet frem til et vist trin, i det del 2 er nuanceret i tre deltrin. I tabellen kan man samtidig se respondenternes sammensætning på en række parametre, baseret på deres egne svar. Enkelte af disse – f.eks. uddannelsesniveau – er behæftet med en vis fejlmargin, fordi svarmulighederne har vist sig ikke at være fuldstændigt dækkende. Særligt mangler en eksplicit skelnen mellem ”sidefag” og ”bifag”.

Parameter	Beskrivelse	1	2a	2b	2cd	3	4	1	2a	2b	2cd	3	4
Samlet	I alt	199	175	162	159	137	135	100%	100%	100%	100%	100%	100%
Demografi	H	71	59	51	50	42	41	36%	34%	31%	31%	31%	30%
	S	29	27	27	27	25	24	15%	15%	17%	17%	18%	18%
	P	85	75	71	68	61	61	43%	43%	44%	43%	45%	45%
	L	14	14	13	13	9	9	7%	8%	8%	8%	7%	7%
Køn	Kvinde	75	67	62	60	51	51	38%	38%	38%	38%	37%	38%
	Mand	124	108	100	98	86	84	62%	62%	62%	62%	63%	62%
Fødselsår	1940-49	30	27	26	25	25	24	15%	15%	16%	16%	18%	18%
	1950-59	46	43	40	40	34	34	23%	25%	25%	25%	25%	25%
	1960-69	36	32	29	27	21	21	18%	18%	18%	17%	15%	16%
	1970-79	60	50	45	45	38	37	30%	29%	28%	28%	28%	27%
	1980-89	27	23	22	22	19	19	14%	13%	14%	14%	14%	14%
Uddannelses-niveau	Anden	15	13	13	13	10	10	8%	7%	8%	8%	7%	7%
	Bachelor	9	7	4	4	3	3	5%	4%	2%	3%	2%	2%
	Hovedfag	69	64	61	61	57	56	35%	37%	38%	38%	42%	41%
	Sidefag	73	63	57	54	45	44	37%	36%	35%	34%	33%	33%
	To-fag	19	18	18	18	15	15	10%	10%	11%	11%	11%	11%
	Uden mat	14	10	9	9	7	7	7%	6%	6%	6%	5%	5%
Universitet	AU	73	65	60	58	51	51	37%	37%	37%	36%	37%	38%
	DTU	3	2	2	2	2	2	2%	1%	1%	1%	1%	1%
	KU	74	64	58	57	47	45	37%	37%	36%	36%	34%	33%
	RUC	14	13	12	12	10	10	7%	7%	7%	8%	7%	7%
	SDU	17	14	13	13	11	11	9%	8%	8%	8%	8%	8%
	Udl.Uni.	4	3	3	3	3	3	2%	2%	2%	2%	2%	2%
	AAU	14	14	14	14	13	13	7%	8%	9%	9%	9%	10%
Faglig kom-bination	Ren Mat.	10	6	5	5	4	4	5%	3%	3%	3%	3%	3%
	Fysik	82	75	68	67	59	58	41%	43%	42%	42%	43%	43%
	Nat (÷Fys)	51	45	44	43	36	35	26%	26%	27%	27%	26%	26%
	÷Nat	56	49	45	44	38	38	28%	28%	28%	28%	28%	28%
	Samf	10	9	9	9	9	9	5%	5%	6%	6%	7%	7%
	Hum/sprog	30	27	23	23	20	20	15%	15%	14%	14%	15%	15%
	Krea	24	21	21	20	16	16	12%	12%	13%	13%	12%	12%

Tabel 4.6: Respondentpopulationens sammensætning gennem spørgeskemaet på forskellige parametre.

Der synes ikke at være nogen af parametrene hvor sammensætningen bliver meget ændret undervejs. For demografi er der et noget større fald for Hovedstaden, end for resten. For alder sker der en forskydning fra personer født i 60'erne og 70'erne til personer født i 40'erne og 50'erne. Hovedfagskandidater synes at holde lidt mere ved. Og personer uddannet fra Københavns Universitet falder lidt mere fra. Men ingen af disse forskydninger er meget voldsomme. Der vil derfor ikke blive taget højde for populationens sammensætning, ved sammenligninger mellem skemaets dele. Undervisningsministeriet har endvidere oplyst, at der ikke findes officielle opgørelser over faktiske fordelinger af eksempelvis køn, alder og fag, som ovenstående fordelinger kan sammenlignes med.

Selve spørgeskemaets udformning vil ikke blive genstand for omtale her. Elementerne vil blive præsenteret løbende efter behov. Det samlede spørgeskema er vedlagt som dokumentation i afhandlingens bilag 1. Spørgeskemaets overordnede struktur var følgende:

1. Spørgsmål om respondenten
    a. Personlig baggrund (køn, alder, uddannelse, m.m.)
    b. Personens undervisning (fag, undervisningsmidler, lærebøger, mv.)
    c. Personens erklærede fagidentitet (én af fire muligheder, opfølgende spm.)
2. Spørgsmål om opgavesyn
    a. Sekvens på 16 opgaver samt opfølgende spørgsmål.
    b. Sekvens på 4 anvendte opgaver fra tidligere eksamenssæt.
    c. Sekvens på 4 opgaver fra Allerød-forsøget.
    d. Valg af foretrukken blandt 4 udgaver af ”samme” opgave.
3. Spørgsmål om fagligt samspil
    a. Præferencer og erfaringer med faglige samspil i forhold til samarbejdsfag.
    b. Sekvens på 8 problemformuleringer for samspil samt opfølgende spørgsmål.
4. Spørgsmål om fagkultur og synspunkter
    a. Spørgsmål om opfattelsen af lokal fagkultur
    b. Spørgsmål om opfattelsen af national (samt regional og international) fagkultur.
    c. Eksplicitte spørgsmål om diverse synspunkter

Ved pilotafprøvning blev en fuld besvarelse vurderet til typisk at tage mindst 45 minutter og maksimalt 2 timer, med 60-75 minutter som det typiske. Dette tidskrav var meldt ud til respondenterne i invitationen. Besvarelsen af spørgeskemaet fandt sted i tidsrummet 4. april til 2. maj 2011. Alle inviterede blev rykket for svar højest to gange.

4.4.3 Benyttet empiri: Interviews

Der er i undersøgelsen gennemført i alt 9 interviews med matematikundervisere fra det almene gymnasium. De er gennemført ad to omgange, som del af pilotafprøvninger af spørgeskemaet. Der er tale om semistrukturerede interviews, der blev båndet og fuldt transskriberet.

De første pilotinterviews var med fire undervisere, fra fire forskellige skoler i hovedstadsområdet. Skolerne blev sorteret efter postnummer og inddelt i fem grupper. For første skole i hver gruppe blev underviseren af det hold der i Lectio kaldes ”3MA”, ”3gMA”, ”3MA/1” eller alternativt ”3Ma” (dvs. tilvalgt supplering fra B- til A-niveau, sekundært fra C- til B-niveau) kontaktet. Ved negativt eller manglende svar, kontaktedes den tilsvarende lærer i næste gruppe. I én gruppe ledte dette ikke til et interview. Derfor blev det til fire interviews i alt.

Under interviewet blev respondenten forelagt udkast til de forskellige opgavesekvenser og blev bedt om at vurdere dem ud fra opstillede svarmuligheder, samt udkast til formuleringer af fire identiteter.

På baggrund af svar, gennemførtes uddybende samtaler om de i situationen umiddelbart mest interessante aspekter. Interviewpersonerne vil i denne afhandling blive refereret til som L1-L4. Om de fire respondenter gælder følgende informationer (oplyst af respondenten):

#	Hovedfag	Sidefag	Universitet	Afsluttet	Anciennitet
L1	Matematik	Mediefag	København	2005	8 år
L2	Dansk	Matematik	Århus	1996	13 år
L3	Musik	Matematik	København	1996	13 år
L4	Fysik	Matematik	København	2004	11 år

Tabel 4.7: Informationer om lærere der deltog i første serie af pilot-interviews.

De fem øvrige pilotinterviews blev gennemført efter at 22 undervisere på én skole var blevet inviteret til at besvare første udkast til spørgeskema. Af disse svarede 12 på skemaet. De hurtigst responderende blev inviteret til et interview, hvoraf fem deltog. Disse interviews var semistrukturerede, men med fokus på lærerens besvarelse. Indholdet var således varierende mellem respondenterne. Der refereres til disse fem respondenter som L5-L9. Af anonymitetshensyn oplyses der ingen informationer om dem her.

4.5 Ramme for perspektiverende diskussion

Metoderne i afsnit 4.2, 4.3 og 4.4 er baseret på en stringent metode, hvor bestemte udvalgte forhold analyseres for en række tilfælde til sammenligning ved brug af et begrebsapparat. Som sagt skal denne forskningsanalyse følges op af en perspektiverende diskussion om det praktiske forandringspotentiale i begrebsapparatet og analysen. Da dette ikke er et egentligt forskningsbelyst aspekt, vil der ikke blive opstillet en egentlig metode omkring det. Men der vil i dette afsnit blive tegnet nogle rammer omkring hvordan diskussionen gribes an.

Grundantagelsen for diskussionen er, at den fagidentitet som praktiseres i hver enkelt undervisningssituation, er en afbalancering mellem indvirkninger fra de tre domæner: Systemet, lærebogen og underviseren. Hvor systemet og lærebogen er størknede størrelser der ikke ændrer sig indenfor den periode et matematikhold undervises, så er læreren en anderledes flydende størrelse. Samtidigt vil det for systemets og lærebogens vedkommende være sådan, at til trods for deres objektive indhold, så vil deres praktiske brug være mere eller mindre afhængig af underviserens tilgang.

Den perspektiverende diskussion handler således om hvordan denne daglige lokale praksis påvirkes på det fagidentitetsmæssige plan. Det kan naturligvis ske ved at introducere nye systemdokumenter og nye lærebøger, hvis fagidentitet er anderledes end det gældende. Men selv i den situation vil læreren kunne trække undervisningen i sin egen retning. Det er således afgørende at undersøge, hvilke påvirkninger der kan udvikle og forandre lærerens personlige fagidentitet. I sidste ende vil en ændret fagidentitet for undervisningen være et produkt sammenvævet af omformninger på alle tre domænetyper.

Skulle man gennemføre en egentlig forskningsmæssig belysning af hvordan fagidentiteter påvirkes, udvikles og forandres, ville man oplagt gøre brug af kvalitative metoder, hvor et mindre antal matematiklærermiljøer blev fulgt over tid. Her kunne der indgå antropologiske studier af møder, uformelle snakke, mv. Interviews i dybden med undervisere. Videooptagelser af forskellige praksisser, mv. Endvidere kunne dette suppleres med et *litteraturstudie*, med fokus på litteratur der har en passende berøring med emnet, f.eks. afrapportering af forskning, dels generelt over faglige miljøer på undervisningsinstitutioner, dels mere specifikt over matematikmiljøer.

Diskussionen her vil i hovedsagen ske med en *analytisk* tilgang, hvor der søges deduceret en struktur indenfor hvilken det faglige miljø fungerer. Diskussionen vil således tage afsæt i en 2x2-begrebsmatrix (se tabel 4.8), udspændt af begrebsparret *institution-individ* og *lokalt-overlokalt*. Der diskuteres altså med to *typer* af påvirkningsmuligheder. Institutionaliseret i form af eksempelvis møder, seminarer, kurser, materialer, bøger samt artikler i tidsskrifter. Og individuelle i form af samtaler, debatter, hjemmesider og indlæg i tidsskrifter. Samtidig opereres på to niveauer. Lokalt på den enkelte skole og overlokalt, for initiativer der spænder på tværs af skoler (typisk nationalt eller regionalt).

Fagmiljøet	**Institutionaliseret**	**Individualiseret**
Lokalt	Fagmøder Seminarer/studiekredse/workshops	Uformelle snakke
Overlokalt (nationalt/regionalt)	Kurser Udviklingsmaterialer Bøger og tidsskrifter	SkoleKom Hjemmesider Tidsskrifter

Tabel 4.8:2x2-begrebsmatrix for udspænding af fagmiljøet, med væsentlige knudepunkter nævnt

Diskussionen vil i et vist omfang kunne kvalificeres med en *kvantitativ* undersøgelse baseret på det spørgeskema der blev beskrevet i afsnit 4.4, hvor der hos de deltagende undervisere er spurgt ind til deres opfattelse af og deltagelse i forskellige typer af fagmiljømæssige aktiviteter. Målet vil således være at diskutere eksistensen af mulige *knudepunkter* i fagmiljøets infrastruktur samt vurdere disses mulige betydning for fagidentitetsudviklingen hos underviserne.

4.6 Opsummering

I dette kapitel er beskrevet afhandlingens grundlæggende filosofiske antagelser om viden af matematikdidaktisk art, herunder indplaceringen i forhold til traditionelle teori-skoler og ”frameworks”. Disse valg indgår som optakt til en mere generel introduktion til de overordnede metodologiske overvejelser bag det der ”er gjort”, i forbindelse med det afrapporterede arbejde.

Mestendels er der opstillet konkrete metoder og præsenteret konkret empiri, som vil blive benyttet i de kommende fire kapitler, til at besvare afhandlingens andet delspørgsmål i kapitel 5, 6, 7 og 8, mens den perspektiverende diskussion vil blive ført sammen med en diskussion af de egentlige forskningsresultater i kapitel 9.

5 Analyse: Fagidentiteter hos systemet

Dette kapitel er afhandlingens første analysekapitel. Her vil begrebsapparatet fra kapitel 3 blive brugt til at analysere fagidentiteter eksisterende på *system*-domæner. Som beskrevet i afsnit 4.2, vil det ske i en historisk og en aktuel del, samt med fokus på *forudstyrende* og *bagudstyrende* dokumenter, det vil især sige styredokumenter og skriftlige eksamenssæt. Analysen vil blive udført i en historisk og en aktuel del, som fylder omtrent det samme. Inden for hver del vil analysen omfatte såvel forudstyrende-, som bagudstyrende dokumenter.

5.1 Analyse af historiske fagidentiteter

Som beskrevet i afsnit 4.2, vil den historiske analyse blive brugt til at lave sammenfatninger for tre historiske perioder: 1) 1935-1961, 2) 1961-1988 og 3) 1988-2005. Perioderne her er afgrænset efter styredokumenter. Ser man i stedet på eksamenssæt, bliver perioderne 1) 1938-1965, 2) 1966-1990 og 3) 1991-2007. Forskydningen handler om at der går mindst tre år fra en ændring implementeres, til den slår igennem ved afgangseksamen for det højeste niveau. Hver periode vil blive analyseret i sit eget afsnit.

5.1.1 Fagidentitet for systemet 1935-1961

Grundstenen til undervisningen i den her undersøgte periode, blev lagt allerede med *Lov om højere Almenskoler m.m.* af. 24. april 1903 (Lovtidende 1903), hvor der indførtes et system med *mellemskole*, *realskole* og *gymnasiet* i tilslutning til »*Folkeskolens* Undervisning for Børn i 11-12 Aars alderen«. Gymnasiets undervisning skulle »meddeles paa 3 delvis forskellige Linier«, som betegnedes den *klassisk-sproglige*, den *nysproglige* og den *matematisk-naturvidenskabelige* linje.

I 1906 udsendtes 1. december ”Anordning angaaende Undervisningen i Gymnasiet” (Lovtidende 1906), hvor der for både de sproglige og den matematisk-naturvidenskabelige linje fastlægges et detaljeret pensum. Og 4. december (s.a.) udstedes ”Bekendtgørelse angaaende Undervisningen i Gymnasiet” (Lovtidende 1906a), hvor der fastlægges en art formålsbeskrivelse for undervisningen på de sproglige linjer. Herom står at formålet »ikke saa meget [skal] være at bibringe Eleverne omfattende Kundskaber i Matematik« men i stedet »*at skole Elevernes Tænkeevne* ved at indøve den gennem Matematikkens stringente Betragtningsmaader«. Til den matematisk-naturvidenskabelige linje blev ikke givet noget formål med at undervise i matematik. Her måtte pensum stå alene.

Styredokumenter 1935 og 1953

I 1935 gennemførtes en større justering af 1903-loven, som dog i det væsentlige mest vedrørte mellem- og real-skolen. Gymnasiet mærkede justeringen ved mindre ændringer i anordning og bekendtgørelse. For alle linjer blev formålet med matematikundervisningen nu indskrevet i anordningen som indledning til pensumlisten, der for den matematisk-naturvidenskabelige linjes vedkommende samtidig blev omstruktureret fra seks emneområder til blot to med tilsammen 38 punkter ("Aritmetik og Plangeometri" og "Stereometri") (Lovtidende 1935). Dertil kom en bekendtgørelsestekst, der bedst kan kendetegnes som en slags "kort undervisningsvejledning" (Lovtidende 1935a). Samtidig udsendtes en cirkulæreskrivelse "angaaende Normaltimeplan m.m. for Undervisningen i Gymnasiet". Her blev matematikfaget på den matematisk-naturvidenskabelige linje tildelt 6 af 36 ugentlige undervisningstimer, alle tre år (Lovtidende 1935b).

I 1953 gennemførtes endnu en justering af anordning og bekendtgørelse, baseret på 1903-loven. Anordningen beholdt sin form med kort formålsbeskrivelse og et pensum i 38 punkter. Formulering og indhold blev dog ændret noget. Formålsbeskrivelserne fra hhv. 1935 og 1953 lyder:

"Kgl. Anordning ang. Undervisningen i Gymnasiet" af 9. marts 1935, §12, pkt. B:	**"Kgl. anordning om undervisningen i gymnasiet" af 8. april 1953, §13:**
»Formaalet for Undervisningen er at bibringe Eleverne Kendskab til de reelle Tal og disses Anvendelse til Beskrivelsen af Funktioner, samt Kendskab til simple Figurer saavel i Planen som i rummet. Eleverne skal lære at arbejde med det matematiske Formelapparat og opnaa Sikkerhed og Færdighed i numeriske Beregninger.«	*Formålet med undervisningen er at bibringe eleverne kendskab til et fundamentalt område af matematikken og gennem arbejdet hermed at udvikle og skole deres evne til stringent tænkning og prægnant udtryksform samt hos eleverne at opøve sikkerhed og færdighed i brugen af det matematiske formelsprog og i udnyttelsen af numeriske beregninger.*
(Lovtidende 1935)	(Lovtidende 1953)

1935-formålets udpegning af reelle tal, funktioner og figurer i plan og rum som undervisningens genstand, peger i retning af *begrebskendskab* og omtalen af "formelapparat" og "numeriske beregninger" peger i retning af *færdighedstræning.*

I 1953-anordningen skifter fokus. De konkrete begreber erstattes af det mere upræcise "område af matematikken", som skal behandles for at udvikle "stringent tænkning" og "prægnant udtryksform". De to målsætninger vil umiddelbart lægge tyngde i tyngdepunktet *ræsonneret retfærdiggørelse* hhv. *konventionskendskab* (altså kendskab til de sproglige konventioner). Men begge mål kan også give tyngde til tyngdepunkter som *teoriforståelse* og *problemløsning*. Den sidste sætning lægger eksplicit vægt på *færdigheder*. Udskiftningen af "formelapparat" med "formelsprog" flytter dog igen tyngde til konventionerne for symbolsprog. Og tilføjelsen af "udnyttelse af" foran "numeriske beregninger" sender et signal om, at dagsordenen er bredere. Måske i retning af *med*-dimensionen.

En analyse af 1935-pensumlisten, hvor hvert enkelt af de 38 punkter opfattes som et *identitetsbidrag*, fås følgende samlede oversigt over bidragene.

Dimension (i alt)	**I** (70)						**Med** (3)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	23	0	1	2	12	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	6	0	1	2	12	1	0	0	3	0	0	0	0
Lille tyngde	2	0	4	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**31**	**0**	**6**	**5**	**26**	**2**	**0**	**0**	**3**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 5.1) Analyse af pensumliste fra 1935-ordningen.

Vægtningen i pensumlisten ligner altså den i formålsparagraffen, i det mest fokus ligger på *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, med tungest fokus på førstnævnte. Her følger et par eksempler på anvendelsen af begrebsapparatet på pensumlisten (se den fulde analyse i bilag A.1):

Punkter som »*1. Reelle Tal, Talfølger, Grænseværdier*« og »*33. Kongruens, Symmetri og Ligedannathedslære*« er vurderet til kun at have tyngde i *begrebskendskab*, i det punkternes indhold alene er defineret ved angivelse af begreber. Dermed ikke sagt, at det ikke i lærebøger og undervisning kan give anledning til andre tyngdepunkter, men formuleringen i teksten har kun det ene fokus.

Punkter som »*5. Den almindelige Ligedannethedslære; herunder to Cirklers Lighedspunkter*«, »*15. Uligheder af 1ste og 2de Grad*« og »*20. Behandling af den almindelige Ligning af anden Grad uden Produktled*« er vurderet til alene at have tyngde i *færdighedstræning*. Igen fordi det der står, er beskrivelse af færdigheder der skal opnås.

Et punkt som »*26. Vektorers Sammensætning og Opløsning*« er vurderet til stor tyngde i *færdighedstræning*, fordi hovedfokus ligger på færdigheder i vektorregning. Men samtidig har det mellem tyngde i *begrebskendskab*, fordi begrebet ”vektor” introduceres. Omvendt med punktet »*25. Komplekse Tal. Den binome Ligning. Løsning af den kvadratiske Ligning i komplekse Tal*«, hvor den primære tyngde er på begrebet ”komplekse tal”, mens færdighederne kommer i tillæg til dette.

De øvrige tyngdepunkter er ikke specielt repræsenteret. Det kan nævnes at punktet »*30. Induktionsbeviset*« er vurderet til kun at have tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*, mens »8. *Undersøgelse af funktionerne:* $y = ax, y = \frac{a}{x}, y = ax + b, \ldots$« vurderes at have stor tyngde i *teoriforståelse*. Her er fokus ikke på et begreb eller en konkret færdighed, men på at dykke ned i teorien.

Hovedparten af tyngdepunkterne (70 af 73) ligger i *i*-dimensionen. Tre steder er der dog tyngde i *med*-dimensionen. Alle tre vurderet til *service*. Det drejer sig om punkterne 27, 29 og 35 omhandlende ”hastighed og acceleration”, ”rentesregning” og ”sfærisk trigonometri”, der giver indtryk af at være matematiske værktøjer til konkret brug i andre fag (de to første implicit, den sidste eksplicit).

Ser man på analysen af 1953-pensumlisten fås (fuld analyse i bilag A.2)

Dimension (i alt)	**I** (71)						**Med** (1)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	20	0	2	2	14	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	9	0	1	1	12	1	0	0	1	0	0	0	0
Lille tyngde	1	0	5	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**30**	**0**	**8**	**4**	**28**	**1**	**0**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 5.2) Analyse af pensumliste fra 1953-ordningen.

Billedet er grundlæggende det samme som i 1935, men dog med en mindre forskydning fra *færdighedstræning* til begrebskendskab. Forskellen kan illustreres med følgende eksempel:

1935-pensumlisten	**1953-pensumlisten**
»12. Kontinuerte og differentiable Funktioner. Differentiation af en flerleddet Størrelse, et Produkt, en Brøk, en Funktion af en Funktion, omvendt Funktion, Differentialkvotient af x^n (n rational), hele og brudne Funktioner (Eksempler), Eksponentialfunktionen, Logaritmefunktionen og de trigonometriske Funktioner. Den simple Middelværdisætning. Maksimum og Minimum.« (Lovtidende 1935, s. 93)	*»17. Differentiable funktioner. Differentiationsreglerne for flerleddet størrelse, produkt, kvotient, sammensat og omvendt funktion. Middelværdisætningen. Funktioners voksen og aftagen. Maksimum og minimum samt største og mindsteværdi. Anvendelse på undersøgelse af kurver, der kan fremstilles ved en ligning af formen y = f (x).«* Lovtidende (1953, s.708)

Dels er begreberne ”kontinuert” og ”differentiabel” blevet adskilt i 1953-pensumlisten. Dels har punktet i 1935-listen karakter af ”en liste over differentiationer der skal kunne gennemføres”, mens 1953-pensumlisten taler om forskellige begreber og disses anvendelse i teorien. Det er altså ”færdigheder med tilhørende begreber” overfor ”begreber med afledte færdigheder”. Det bemærkes endvidere, at i 1953-pensumlisten er *med*-dimensionen skrumpet, så kun rentesregningen optræder.

I de tilhørende bekendtgørelser går indholdet i 1935-bekendtgørelsen igen i 1953-bekendtgørelsen, som dog er udvidet (fra ca. 13 til ca. 34 linjer). Hovedindholdet er faglige præciseringer, som ikke flytter på identiteten. Der findes dog følgende formulering (fra 1953-bekendtgørelsen, men stort set ækvivalent til en tilsvarende i 1935-bekendtgørelsen):

> »Et samarbejde med de fag, specielt fysik, hvor matematikken kan komme til anvendelse, bør tilstræbes, og undervisningen bør planlægges under hensyn hertil.« (Lovtidende 1953a, s.420)

Selvom det (stort set) er fraværende i formåls- og pensumbeskrivelsen, så findes der altså en artikuleret hensigt om at *med*-dimensionen skal fylde. Dette primært i *service*-tyngdepunktet, idet matematikken beskrives som noget der skal ”komme til anvendelse” i andre fag. I 1953-bekendtgørelsen findes tillige følgende formulering:

> »Det vil for forståelsen af kultursammenhængen være af betydning, om der af matematikkens historie medtages træk, der har almenmenneskelig interesse, samt at der gennemgås illustrerende eksempler fra epoker inden for den matematiske tænknings historie, tjenende til at vise, hvorledes fundamentale problemer er opstået og løst.« (ibid.)

Der optræder altså fra 1953 også et artikuleret krav om bidrag i *om*-dimensionen, primært på tyngdepunktet *intern refleksion*. Dette afspejles dog hverken i formål eller pensum.

Eksamensopgaver 1951, 1952 og 1953

I ”*Kongelig anordning angående studentereksamen*” fra 1935 hedder det:

> »Ved den skriftlige Prøve gives 2 Sæt Opgaver. Mindst Halvdelen af Opgaverne skal være umiddelbare Anvendelser af det læste Stof. Een af opgaverne kan bestaa i at føre Bevis for en Sætning i det Pensum, som opgives til mundtlig Prøve. Mindst een af Opgaverne skal give Lejlighed til at prøve Eksaminandernes Færdighed og Sikkerhed i numerisk Beregning.« (Lovtidende 1935c, s.648).

Formuleringen om ”umiddelbare anvendelser af det læste stof” og ”færdighed og sikkerhed i numerisk beregning” peger begge mod at give tyngde til *færdighedstræning*, mens muligheden for ”at skulle føre bevis” lægger tyngde til *ræsonneret retfærdiggørelse*. Det forhold at et antal opgaver ikke er rammet ind af beskrivelserne, gør det dog også oplagt at andre tyngdepunkter indfanges. Eksempelvis *problemløsning.* 1953-eksamensanordningen er magen til, blot uden bevismuligheden.

Sammenligninger man sættene fra 1951, 1952 og 1953 er der en ret klar struktur. I hvert sæt starter én opgave med sætningen ”løs ligningen…” og en med ”undersøg og tegn kurven…”. Hvert sæt har også en opgave i plangeometri (undersøgelse af en tre- eller firkant), en opgave i rumgeometri (parallelepipedum eller cylindersnit) og en opgave i analytisk geometri (hyperbel/parabel). Endeligt er der en lidt friere opgave, som dog i alle tilfældene har noget med ligninger at gøre. Sammen med ”løs ligningen”, dækker sidstnævnte gerne emnerne komplekse tal og trigonometriske identiteter.

Opfattes hver af de 18 opgaver som et identitetsbidrag, ser oversigte over de tre sæt således ud (se bilag A.3 for hele analysen):

Dimension (i alt)	**I** (34)						**Med** (0)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	14	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	4	2	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	4	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**18**	**9**	**1**	**0**	**6**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 5.3) Analyse af eksamensopgaver fra 1951, 1952 og 1953.

Der ses et ganske tydeligt fokus på *færdighedstræning* – det vil sige at eksamensspørgsmålene i høj grad afprøver i hvilken grad eleverne har indlært sig velafgrænsede færdigheder. Her er tre eksempler på opgaver, som er vurderet til kun at have tyngde i dette tyngdepunkt:

1952, sæt I. opgave 2:	**1951, sæt II, opgave 1:**	**1953, sæt II, opgave 3:**
Løs ligningen $8x^6 + 63i \cdot x^3 + 8 = 0$, idet rødderne angives på formen $a + ib$, hvor a og b er reelle tal. (UVM 1952)	Undersøg og tegn kurven $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 2}$. Beregn arealet af den lukkede figur, der begrænses af kurven og linierne $y = x + 1$, $x = -1$ og $x = 1$. (UVM 1951a)	I kassen $ABCD - A_1B_1C_1D_1$, hvor $AA_1 \neq BB_1 \neq CC_1 \neq DD_1$, er kanten AB = kanten BC = 4, og kanten BB_1 = 2. Midtpunkterne af kanterne AB og BC kaldes henholdsvis M og N. Find rumfanget og overfladen af tetraederet B_1DMN. Find endvidere tetraederets toplansvinkler langs kanterne MN og B_1D. (UVM 1953a)

At finde rødder i et kompleks polynomium er en typeopgave, hvor en forholdsvist standardiseret proces kan afvikles, hvis eleven ser at der er tale om en andengradsligning i x^3. Et element af problemløsning kunne her hævdes, men det er vurderet at være rutine. Det gælder også for undersøgelse af en kurve, samt at bestemme arealer under kurver. Det gælder – måske mindre oplagt – også for det at bestemme rumfang, overflade og toplansvinkler for et tetraeder defineret ud fra et parallellepipedum (her en kasse).

Det ses tabel 5.3, at problemløsning og ræsonneret retfærdiggørelse også spiller en rolle. Det gælder bl.a. i følgende tre opgaver:

1952, sæt I, opg. 3: I en konveks firkant *ABCD* er vinkel *A* lig med vinkel *C*. Idet siden *AB* = 57, siden *BC* = 44, siden *CD* = 61 og siden *DA = 51*, skal man beregne firkantens vinkler og diagonalen *BD*. (UVM 1952)	**1952, sæt I, opgave 1:** Gennem punktet *A*(1,2) tegnes en ret linie med hældningskoefficienten (retningskoefficienten) α og gennem punktet $B\left(2,-\frac{1}{2}\right)$ en ret linie med hældningskoefficienten β. Find ligningen for det geometriske sted for skæringspunktet mellem de to linier, når α og β varierer således, at $\alpha - \beta = \frac{1}{2}$. Angiv brændpunkt og ledelinie for den fundne kurve. (UVM 1952)	**1953, sæt 1, opgave 1:** Bevis formlen $2 \cdot a + 4 \cdot (a+1) + 6 \cdot (a+2) + \cdots + 2n \cdot (a+n-1) = \frac{n(n+1)(3a+2n-2)}{3}$ idet *a* er et givet tal og *n* et vilkårligt positivt helt tal. Find dernæst summen $1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6 + \cdots + n \cdot 2n$ (UVM 1953)

Den første opgave er mest baseret på færdigheder ud i trigonometriske beregninger, men rummer alligevel et element af problemløsning, fordi svaret ikke findes blot ved aktivering af færdigheder. Den anden opgave kan derimod siges især at have størst tyngde i problemløsning. Her er svaret ikke fundet ved aktivering af velkendte processer, men kræver derimod en højere grad af selvstændig opstilling af løsningsprocessen. I den tredje opgave er der stor tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*, fordi opgaven handler om at bevise noget. Løsningen sker dog ved standard brug af induktionsbevis og derved ved indsættelse i formlen (hvis eleven gennemkuer at $a = 1$ - her kunne man hævde et problemaspekt, men det er ikke gjort). Opgaven har derfor mellemtyngde i færdighedstræning,

Samlet vurdering af perioden 1935-1961

De forudstyrende dokumenter lægger i deres fremstilling tyngden på *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, med umiddelbar størst vægt på det første. Eksamensopgaverne har kun begrænset tyngde i begrebskendskab, men tilføjer et aspekt af *problemløsning*. Samlet set placerer eksamensopgaverne dog langt hovedvægten af *i*-dimensionen på færdighedstræning. Dertil kommer at *med*- og *om*-dimensionerne kun for alvor indgår i de forudstyrende dokumenters mere abstrakte dele. I pensumlisten er de næsten og i eksamensopgaverne helt fraværende. Den reelle fagidentitet synes altså at være et rent *i*-fokus, med absolut størst vægt på *færdighedstræning*.

5.1.2 Fagidentitet for systemet 1961-1988

1903-loven stod i 55 år. I 1958 vedtoges som led i en samlet reform af skolesystemet, en ny gymnasielovgivning. I 1961 udsendtes en tilhørende bekendtgørelse (hvis funktion svarede til de tidligere anordningers). Efter denne blev den matematiske linje fra 2.g delt op i tre grene: En fysisk, en naturfaglig og en samfundsfaglig. Det faglige niveau var højest på den matematisk-fysiske gren. Perioden var under kraftig inspiration fra ”60’er matematikken” (se afsnit 1.2.2). Allerede i 1971 lå igen en ny gymnasielov klar efter den såkaldt ”lille reform”, hvis primære formål var at implementere at lørdag blev fridag.

Styredokumenter 1961 og 1971

Grundlaget for styredokumenterne af 1961, er betænkning 269 fra 1960 ”Det nye gymnasium” også kendt som ”Den røde betænkning” (UVM 1960). Her giver undervisningsministeriets læseplansudvalg et bud på dels en anordning om undervisningen i gymnasiet, dels en bekendtgørelse. I anordningen optræder en kort emneliste for matematik, som uddybes detaljeret i bekendtgørelsen. I 1961 udsendes en bekendtgørelse, hvis indhold ligner udvalgets udkast til anordning samt ”vejledende bestemmelser vedrørende undervisningen i gymnasiet”, som ligner udkastet til bekendtgørelse. I 1971 udsendes en ny bekendtgørelse, som nu i sin form ligner bekendtgørelsesudkastet fra ”den røde betænkning”. På indholdssiden udgår ”komplekse tal” og ”rumgeometri”, mens ”sandsynlighedsregning og statistik” kommer til.

<table>
<tr>
<td>

”Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet” af 6. september 1961, §19, pkt. A:

*»Formålet med undervisningen er
at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber og tankegange,
at vække deres sans for klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at søge deres fantasi og opfindsomhed udviklet,
at øve dem i behandlingen af konkrete problemer, herunder udførelse af numeriske regninger, samt
at gøre dem fortrolige med anvendelser af matematikken inden for andre fagområder.*

Undervisningen skal … omfatte følgende emneområder:

1. *Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.*
2. *Hele, rationale, reelle og komplekse tal.*
3. *Kombinatorik.*
4. *Ligninger og uligheder.*
5. *Plangeometri.*
6. *Rumgeometri.*
7. *Elementære funktioner.*
8. *Infinitesimalregning.*
9. *Anvendelser af infinitesimalregningen.*
10. *Valgfrit emne.«*

(Lovtidende 1961)

</td>
<td>

”Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet og om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen” af 16. juni 1971, §18,pkt.I:

*»Undervisningen har til formål:
at give eleverne kendskab til en række fundamentale matematiske begreber, tankegange og metoder,
at opøve eleverne i anvendelse af matematiske begreber, tankegange og metoder til formulering, analyse og løsning af problemer inden for forskellige fagområder,
at opøve klarhed og logisk sammenhæng i bevisførelse og udtryksform,
at udvikle fantasi og opfindsomhed,
at give en forståelse af og evne til kritisk at analysere den måde, hvorpå matematikken anvendes inden for forskellige fagområder.«*

[Tillige skrives om undervisningen:]

»Teoretiske matematiske strukturer kan opbygges på grundlag af velformulerede problemer. Undervisningen kan omfatte problemstillinger fra økonomi, biologi, fysik, sociologi, teknik, databehandling, informationsteori, psykologi, sprog, kemi m.m. «

[Endeligt følger en indholdsbeskrivelse med følgende overskrifter:]

1. *Almene hjælpebegreber fra mængdelære og algebra.*
2. *Hele, rationale og reelle tal.*
3. *Kombinatorik, sandsynlighedsregning og statistik.*
4. *Ligninger og uligheder.*
5. *Plangeometri.*
6. *Elementære funktioner.*
7. *Infinitesimalregning.*
8. *Anvendelser af infinitesimalregningen.*
9. *Valgfrit emne.«*

(UVM 1971)

</td>
</tr>
</table>

Formålsbeskrivelserne består af to punktlister med hhv. 5 og 6 punkter. I 1961-bekendtgørelsens første punkt nævnes *begrebskendskab* eksplicit i første punkt, sammen med det lidt mere upræcise ”tankegange”. I andet punkt nævnes *bevisførelse* og *udtryksform* der peger mod *ræsonneret retfærdiggørelse* samt i mindre grad på *konventionskendskab*.

I 1971-bekendtgørelsen optræder de tilsvarende punkter. I det første med ordet ”metoder” tilføjet, hvilket indikerer en bevægelse fra matematik som noget ”man ved” til noget ”man gør”. Denne bevægelse understreges af, at der mellem de to punkter er indskudt et helt nyt om anvendelse af matematik inden for forskellige fagområder. I *i*-dimensionen giver det tyngde til *problemløsning.*

Formuleringen giver dog især tyngde til *med*-dimensionen. Dette understøttes af det sidste punkt i 1971-bekendtgørelsen og teksten om undervisningen. Formålspunkterne synes at lægge tyngden i *service*, fordi indholdet styres af ”anvendelse inden for forskellige fagområder. Undervisningsteksten er mere af typen *motivation*, fordi indholdet synes styret af hensyn til ”teoretiske matematiske strukturer”. I 1961-bekendtgørelsen er den samlede tyngde i *med*-dimensionen givet af formålsbeskrivelsens sidste punkt, som har sin tyngde i *service*.

Begge beskrivelser taler om ”fantasi og opfindsomhed”, der kan være svære at indplacere i identitetsdimensionerne, da der er tale om almene egenskaber udenfor faget. 1961-bekendtgørelsen tales også om ”konkrete problemer” og ”numeriske regninger”, som peger mod *færdighedstræning*.

I de vejledende bestemmelser til 1961-bekendtgørelsen bliver de 10 punkter udpindet i en ret præcis beskrivelse af hvad indholdet under hvert emne skal indeholde. Dertil falder for hver udpensling en række bemærkninger om, hvordan indholdet mere præcist skal forstås. Endvidere falder nogle generelle bemærkninger om undervisningens tilrettelæggelse. I 1971 flytter den detaljerede udpensling af punkterne ind i selve bekendtgørelsen, men uden bemærkninger. Indholdet er ændret ganske lidt. Væsentligst er emnerne rumgeometri og komplekse tal gledet ud, men det påvirker ikke fagidentiteten specielt. Derfor analyseres alene 1961-vejledningen (for fuld analyse se bilag A.4):

Dimension (i alt)	**I** (25)						**Med** (5)				**Om** (2)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	6	0	0	0	5	0	0	0	2	0	1	0	0
Mellem tyngde	4	0	2	2	2	2	0	0	1	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	2	0	0	0	0	2	0	0	1	0	0
Sum	**10**	**0**	**4**	**2**	**7**	**2**	**0**	**2**	**3**	**0**	**2**	**0**	**0**

Tabel 5.4) Analyse af ”Vejledende bestemmelser vedrørende undervisningen i gymnasiet”, §17

Igen er det *færdighedstræning* og *begrebskendskab* der dominerer, om end i et endnu mere ligeværdigt forhold her, end i 1935- og 1953-dokumenterne. Den store nyskabelse er øget tyngde på *med*-dimensionen. Der optræder nu identitetsbidrag der alene vægter denne dimension – dvs. anvendelse bliver en pointe uafhængigt af teori. Det sker bl.a. i følgende formulering fra 1961-vejledningen:

> »Der bør lejlighedsvis finde en behandling sted af opgaver og eksempler hentet fra andre fagområder (fysik, kemi, samfundsfag, biologi, m.v.). Dette eksempelmateriale bør være varieret og illustrere anvendelser af de gennemgåede afsnit af matematikken i den udstrækning, det er muligt.« (UVM 1960, s.90).

Her er tale om et bidrag af typen *motivation*, i det der på den ene side lægges vægt på at indholdet styres af ”gennemgåede afsnit i matematikken”, på den anden side sættes rammerne for typen af opgaver ved, hvad der er relevant for de fag eksemplerne hentes fra.

Eksamensopgaver 1969, 1970 og 1971 samt 1980, 1981 og 1982

I eksamensbekendtgørelsen fra 1961 beskrives om den skriftlige eksamen, at den består af to sæt med hver fire opgaver, hvoraf to obligatorisk skal besvares, mens eksaminanden selv vælger én af de to øvrige til besvarelse. Om opgaverne skrives der:

> »Der skal jævnligt stilles opgaver, som kan tjene til at prøve eksaminandernes færdighed i numerisk regning. Desuden bør der lejlighedsvis stilles opgaver, som giver anledning til at undersøge, om der er erhvervet forståelse af matematikkens anvendelse inden for andre fagområder. I disse opgavers tekst skal de nødvendige ikke-matematiske forudsætninger nøje præciseres.«
> (UVM 1961, s. 8)

Her vægtes altså umiddelbart de mest grundlæggende færdigheder og derudover anvendelsesdimensionen. Analysen af opgaverne fra 1969, 1970 og 1971 viser (se hele analysen i bilag A5):

Dimension (i alt)	**I** (47)						**Med** (4)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	20	1	2	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	2	4	0	1	1	2	2	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	1	1	1	2	2	6	1	1	0	0	0	0	0
Sum	**23**	**6**	**3**	**3**	**3**	**9**	**3**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 5.5) Analyse af eksamensopgavesættene fra maj-juni 1969, 1970 og 1971

Analysen viser, at opgaverne i høj grad har fokus på afprøvning af *færdigheder*. Dertil kommer et vist element af *problemløsning*. Det der dog særligt adskiller sig fra tidligere er, at der er kommet tyngde i *konventionskendskab*. Mange opgaver bygger på bestemte konventioner om hvordan matematik skal noteres. Dertil kan tilføjes, at opgaverne ikke synes at afspejle kravet fra bekendtgørelsen om ”lejlighedsvis” at berøre matematikkens anvendelse i andre fag.

Her skal blot gives to eksempler på opgaver fra de tre år:

1971, sæt II, opgave 2 Af et sædvanligt spil kort (52 blade) trækkes på tilfædlig måde tre kort. Beregn sandsynligheden for, at 1) de tre kort alle er røde (er hjerter eller ruder). 2) ikke alle tre kort er røde. 3) mindst ét af de tre kort er rødt. 4) de tre kort er to konger og et rødt es. 5) de tre kort er enten tre esser eller to esser og en konge. De fundne sandsynligheder ønskes angivet som uforkortelige brøker. (UVM 1971b)	**1969, sæt II, opgave 3b** I planen er valgt et koordinatsystem. En ret affinitet *f* er bestemt ved $(x,y) \curvearrowright \left(1+\frac{5}{6}x-\frac{1}{6}y, 1-\frac{1}{6}x+\frac{5}{6}y\right).$ Bestem en ligning for affinitetsaksen, og find forvandlingstallet. En punktmængde *M* er bestemt ved $\{(x,y) \mid y = x^2\}$ Find en ligning for *f*(*M*). Find koordinatsættene til skæringspunkterne mellem *M* og *f*(*M*). (UVM 1969a)

Begge opgaver er vurderet til at have stor tyngde i *færdighedstræning*. Dette fordi der stilles meget konkrete spørgsmål hvis besvarelse bygger på veldefinerede færdigheder. Opgaven til venstre har endvidere tyngde i *anvendelsesdimensionen*, primært i *illustration*, fordi det er sandsynlighedsregningen der sætter dagsordenen. Den har dog også lille tyngde i *motivation*, fordi valget af et kortspil sætter visse rammer. Endeligt kunne der her argumentere for et aspekt af problemløsning fordi det ikke nødvendigvis er trivielt at bestemme antal udfald i hændelserne. Sådan er det dog ikke vurderet her. Opgaven til højre har endvidere mellem tyngde i *konventionskendskab*. Dette fordi opgaven tillige har til opgave at teste kendskabet til bestemte konventioner om notation og terminologi.

I bekendtgørelsen fra 1971 er antallet af obligatoriske opgaver sat op til »sædvanligvis 4-7« pr. sæt. Om disse opgaver siges alene at de skal have en »enkelt problemstilling«. Dertil kommer to opgaver, af hvilke eksaminanden selv skal vælge én til aflevering (UVM 1971, s. 19). En analyse af opgaverne fra 1980, 1981 og 1982 gav følgende (se hele analysen i bilag A.6):

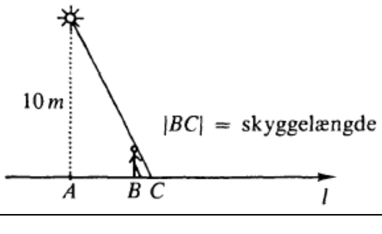
Dimension (i alt)	**I** (59)						**Med** (15)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	37	4	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	5	0	1	1	0	1	3	10	1	0	0	0	0
Lille tyngde	1	0	3	2	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Sum	**43**	**4**	**5**	**5**	**1**	**1**	**3**	**10**	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 5.6) Analyse af eksamensopgavesættene fra maj-juni 1980, 1981 og 1982.

Her synes at være et endnu større fokus på *færdighedstræning*, mens konventionskendskab er trådt i baggrunden igen. Den væsentligste forandring er en kraftig opprioritering af *med*-dimensionen, til trods for at dette er gledet ud af beskrivelsen i bekendtgørelsen.

De to opgaver bragt herunder, viser lidt om denne nye anvendte stil. Opgaven til venstre har stor tyngde i *færdighedstræning*, fordi spørgsmålene er velafgrænsede i forhold til løsningsmetoden, mens opgaven til højre har stor tyngde i *problemløsning*, fordi det ikke er umiddelbart klart hvordan opgaven skal besvares. Opgaven til venstre har i *med*-dimensionen tyngde i *illustration*, fordi rammen såvel som indholdet er tilpasset matematikken (hvem beregner denne type skyggelængde?). Opgaven til højre har derimod tyngde i *service*. Rammen er godt nok fastlagt af matematikken, men indholdet styres af den beskrevne fysiske problemstilling.

1981, sæt I, opgave 2
I højden 10m over gaden hænger en lampe, og en 2m høj mand befinder sig til tiden $t = 0$ i afstanden 4m fra A (se figur).



1982, sæt I, opgave 7b
For en lyskilde med lysstyrken N gælder, at lysintensiteten i et punkt med afstand a til lyskilden er $\frac{N}{a^2}$.
(Lysstyrken måles i candela, lysintensiteten i lux og afstanden i meter.)
For et punkt, der er beliggende på forbindelseslinjen mellem to lyskilder, gælder, at den samlede lysintensitet i punktet er summen af de to lysintensiteter.
To lyskilder, hvoraf den ene har otte gange så stor lysstyrke som den anden, er placeret i afstanden 6

Hvor lang er hans skygge til tiden $t = 0$? Han bevæger sig med den konstante fart $\frac{1}{2}$ m/s væk fra A langs den rette linje l. Hvor lang er hans skygge til tiden $t = 16$? Til hvilket tidspunkt er hans skyggelængde 2m? Bestem skyggens længde som funktion af tiden. (UVM 1981)	meter fra hinanden. Beregn beliggenheden af det punkt på forbindelses-linjen mellem de to lyskilder, i hvilket lysintensiteten er mindst. (UVM 1982)

Samlet vurdering af 1961-1988

De forudstyrende dokumenter er ensartede for perioden. Fokus er som for den forgående periode på *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, med størst tyngde på det første. Det nye er en større tyngde i *med*-dimensionen – primært i *motivation*. I eksamensopgaverne slår denne dog først igennem efter 1971-ændringen. Før 1971-ændringen er der til gengæld relativ stor tyngde i *konventionskendskab*, i det en helt bestemt notation inspireret af mængdelæren, søges indarbejdet i de fleste områder.

5.1.3 Fagidentitet for systemet 1988-2005

I 1988 trådte endnu en gymnasiereform i kraft. Grundstrukturen fra 1903-reformen med en matematisk og en sproglig linje blev fastholdt, men grenstrukturen fra 1958-reformen blev erstattet af et *valgfagsgymnasium.* Hver linje havde en grundpakke af fag, som eleven skulle udbygge med et antal valgfag. På den matematiske linje indgik et 2-årigt obligatorisk matematikniveau, som kunne udvides med et 1-årigt tilvalg i 3.g til *højt niveau*. I 1997 vedtoges tillige en justering, så det høje niveau kunne tilvælges allerede i 2.g (kaldet 3-årigt højniveau).

Styredokumenter 1988-2005

I kølvandet på reformen udsendtes en *bekendtgørelse* med nogle overordnede bestemmelser samt et sæt af *vejledende retningslinjer*. Bekendtgørelsen for det 1-årige højniveau var lavet, så den byggede oven på det obligatoriske niveau. Og tilsvarende for opgavesættene ved skriftlig eksamen. Dette forsvandt imidlertid på det 3-årige højniveau. Da forskellene ikke er så store, tager denne analyse derfor alene afsæt i bekendtgørelsen for det 3-årige højniveau der udsendtes i maj 1999.

Bekendtgørelsen taler ikke eksplicit om et ”formål” med undervisningen, men opstiller tre ”mål”, der kan opfattes som ”formål”. Formålsparagraffen lyder således:

> »Målet med undervisningen er,
>
> a) at eleverne erhverver indsigt i en række fundamentale matematiske tankegange, begreber og metoder.
> b) at eleverne opnår fortrolighed med matematik som et middel til at formulere, analysere og løse problemer inden for forskellige fagområder
> c) at eleverne videreudvikler deres evne til selvstændigt at benytte matematiske begreber og metoder og bliver i stand til at sætte sig ind i, analysere og vurdere problemkredse, der kan formuleres og bearbejdes ved hjælp af matematiske begreber og metoder.«
> (UVM 1999, pkt.1)

Punkt a taler om ”begreber og metoder”, der umiddelbart peger mod *begrebskendskab* og *færdighedstræning*. Ordet ”tankegange” er sværere at placere entydigt. Punkt b peger i *i*-dimensionen delvist på *problemløsning*, men giver især tyngde til *med*-dimensionen. Enten i *service* eller *værktøj*. Punkt c udbygger punkt a, idet ordet ”selvstændigt” lægger tyngde i *problemløsning*.

Selve undervisningens indhold beskrives i en 5x3-matrix. På den ene side 5 emner der skal gennemgås (tal, geometri, funktioner, infinitesimalregning og sandsynlighedsregning), på den anden side tre aspekter der skal berøres (historie, modellering og indre struktur). Dette opfattes som i alt 8 identitetsbidrag. Analysen viser (se bilag A.7 for hele analysen):

Dimension (i alt)	**I** (17)						**Med** (1)				**Om** (2)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	2	0	1	0	3	0	0	0	1	0	1	0	0
Mellem tyngde	3	0	2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1
Sum	**5**	**0**	**4**	**3**	**5**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**1**	**0**	**1**

Tabel 5.7) Analyse af bekendtgørelsen for ”3 årigt A-niveau” fra maj 1999.

Billedet viser en ligelig balance mellem *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, samt et relativt til de to tidligere epoker, større fokus på ræsonneret retfærdiggørelse og teorikendskab. Dette har til dels noget at gøre med analysemetoden – mere præcist hvordan teksten opdeles i identitetsbidrag. Men det afspejler formentlig også at tyngden i teoridimensionen bliver spredt mere ud på dette tidspunkt. Dertil kommer få men tunge identitetsbidrag i *med*- og *om*-dimensionen.

Eksamensopgaver 2000, 2001 og 2002

Den skriftlige eksamen på det 3-årige A-niveau består af to sæt opgaver. Et med 10-12 opgaver der løses helt uden hjælpemidler på 2 timer, samt et med ca. 8 opgaver (heraf to hvoraf kun én må besvares), hvor det forudsættes at man har adgang til bøger, formelsamling og ”grafregner” (men ikke CAS-værktøj). Til dette gives 4 timer (UVM 1999, pkt. 7). Analysen af disse sæt fra årene 2000, 2001 og 2002 er sammenfattet her (for fuld analyse, se bilag A.8):

Dimension (i alt)	**I** (77)						**Med** (10)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	50	4	1	2	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	4	1	1	3	2	0	4	4	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	2	0	3	2	0	0	1	1	0	0	0	0
Sum	**54**	**7**	**2**	**8**	**6**	**0**	**4**	**5**	**1**	**0**	**0**	**0**	**0**

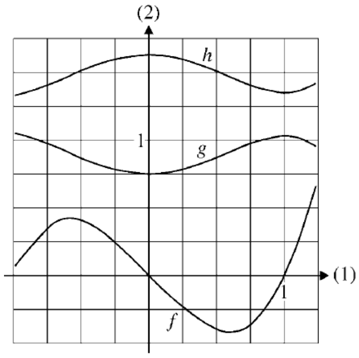
Tabel 5.8) Analyse af eksamensopgaver for ”3 årigt A-niveau” maj-juni 2000, 2001 og 2002.

Som det fremgår har langt hovedparten af opgaverne deres tyngde liggende i *færdighedstræning.* Dette gælder f.eks. følgende eksempler på opgaver:

2000, sæt u.hjælpm., opg. 13	**2001, sæt u.hjælpm., opg. 8**	**2000, sæt m.hjælpm., opg. 1**
For ethvert tal a er en funktion *f* bestemt ved $f(x) = \begin{cases} \dfrac{(2ax+6a)(x+5)}{x+3} & ,x \neq -3 \\ 4 & ,x = -3 \end{cases}$ Bestem $\lim_{x \to -3} f(x)$ udtrykt ved a. Bestem a, således at *f* er kontinuert. (UVM 2000a)	En funktion *f* er løsning til differentialligningen $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2-1}{x+2}$, og grafen for *f* går gennem punktet *P*(2,3). Bestem en ligning for tangenten til grafen for *f* i punktet *P*. (UVM 2001a)	I et koordinatsystem i planen er to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ bestemt ved $\vec{a} = \binom{2}{3}$ og $\vec{b} = \binom{t}{1}$. Beregn *t*, når det oplyses, at $\det(\vec{a}, \vec{b}) = -10$. Beregn for den fundne værdi af *t* vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. (UVM 2000)

Alle tre opgaver har stor tyngde i *færdighedstræning*, fordi de beder eleven om at udføre løsning af en standardopgave. Der er således flere eksamenssæt med opgaver hvor grænseværdien for en polynomiumsbrøk med en ukendt parameter skal bestemmes, hvor en tangent til en løsning til en given differentialligning skal findes og hvor vektorer med et variabelt koordinat behandles. Opgaven til venstre har dog tillige mellemtyngde i *begrebskendskab*, fordi eleven udfordres på kendskab til begrebet *kontinuitet*. De to andre opgaver har ikke anden tyngde.

Det ses at teoriforståelse i disse sæt spiller en – relativt til tidligere tider – større rolle. Eksempler på dette er nedenstående to opgaver. Opgaven til venstre har stor tyngde i teoriforståelse – og ikke anden tyngde – fordi opgaven alene udfordrer på den teoretiske forståelse af relationerne mellem en funktions graf og dens stamfunktions graf. Opgaven til højre har stor tyngde i *begrebskendskab*, fordi fokus er på begreber som *definitionsmængde*, *funktionsværdi*, *differentiabilitet*, m.m. Men opgaven har tillige mellemtyngde i *teoriforståelse*, fordi begreberne skal relateres til en graf.

2000, sæt u.hjælpm., opg. 12	**2001, sæt u.hjælpm., opg. 11**
På figuren nedenfor ses graferne for tre differentiable funktioner *f*, *g* og *h*. Det oplyses, at én af funktionerne *g* og *h* er stamfunktion til *f*. Gør rede for, hvilken af funktionerne *g* og *h*, der er stamfunktion til *f*.  (UVM 2000a)	Tegn grafen for en funktion *f*, der opfylder følgende: *f* har definitionsmængden [1;6] *f*(1) = 2, *f*(4) = 0 og *f*(6) = -4 *f* er differentiabel i]1;6[fortegn og nulpunkter for *f'* er som angivet i tallinjen:  (UVM 2001a)

Samlet vurdering 1988-2005

De forudstyrende dokumenter lægger i *i*-dimensionen op til en blanding af *færdighedstræning*, *begrebskendskab*, *ræsonneret retfærdiggørelse* og *teoriforståelse*, med størst tyngde i de to første. Eksamensopgaverne fokuserer dog tydeligt på *færdighedstræning*. I *med*-dimensionen lægges i det forudstyrende op til tyngde i *servicefunktion*, mens eksamensopgavernes tyngde i *med*-dimensionen ligger i *illustration* og *motivation*. *Om*-dimensionen har kun tyngde i det forudstyrende.

5.2 Analyse af aktuel fagidentitet

I 2003 vedtog Folketinget en gymnasiereform, der ophævede inddelingen i en sproglig og en matematisk linje. I stedet inddeltes gymnasieforløbet i et halvårligt *grundforløb* og derpå et *hovedforløb* på 2½ år. Grundforløbet er principielt ens for alle, mens hovedforløbet tones for den enkelte klasse af en *studieretning* bestående af tre fag, heraf mindst ét på A-niveau.

Dertil kom en række timerammer til samspil mellem fagene – *naturvidenskabeligt grundforløb* (NV), *almen sprogforståelse* (AP) og *almen studieforberedelse* (AT) – samt to store tværfaglige opgaver – *studieretningsopgaven* (SRO) og *studieretningsprojektet* (SRP).

Reformen blev påbegyndt indfaset i august 2005 og de første studenter forlod gymnasiet under den nye ordning i sommeren 2008. De første skriftlige eksamener for matematik på det højeste niveau – A-niveauet – er således fra 2008. Med reformen fulgte også nye læreplaner for alle fag.

5.2.1 Styredokumenter siden 2005

De to væsentligste forudstyrende dokumenter for matematik A-niveau er *læreplanen* og den tilhørende *vejledning*. Siden implementeringen påbegyndtes er der sket justeringer af disse i 2008, 2010 og 2013. Justeringen i 2010 var mest omfattende, med bl.a. en omskrivning af hele vejledningen, der således blev reduceret fra 89 til 29 sider. Reduktionen skete især ved at fjerne en meget stor samling af såkaldte *paradigmatiske eksempler* på opgaver, forløb, samspil med andre fag, osv.

Justeringen af 2013 var marginal og vejledningen ændredes ikke. Der tages således her afsæt i læreplan og vejledning fra 2010, idet den forventes at afspejle den fagidentitet som systemet efter de første fem år har landet faget på.

Læreplanen

Læreplanen (bilag 35 til ”bekendtgørelse om uddannelse til studentereksamen”) er opbygget i fire afsnit, hvoraf især de første to er relevante for fagets identitet. Det første afsnit hedder ”Identitet og formål” og rummer to underafsnit med overskrifterne ”identitet” og ”formål”. Det andet hedder ”Faglige mål og fagligt indhold” og rummer tre underafsnit. Dels ”Faglige mål” som fortæller hvad eleverne *skal kunne* og dels ”Kernestof” og ”Supplerende stof”, som fortæller hvad de *skal vide*.

Ser man på afsnittet ”Identitet”, så forsøger det på sin vis at eksplicitere hvad systemets fagidentitet er. Første sætning i afsnittet lyder:

> »Matematik bygger på abstraktion og logisk tænkning og omfatter en lang række metoder til modellering og problembehandling.« (UVM 2010, bilag 35: ”Matematik A”, afsnit 1.1).

Sætningen nævner to kognitive færdigheder som udgør fundamentet for matematik, samt nævner at man med matematik får adgang til værktøjer, som kan mindst to ting. Sætningen nævner altså det der kommer før og det der følger efter faget, men forsøger ikke i ordlyden at indkredse hvad der er særligt for selve faget. Derpå følger:

> »Matematik er uundværlig i mange erhverv, i naturvidenskab og teknologi, i medicin og økologi, i økonomi og samfundsvidenskab, og som grundlag for politisk beslutningstagen. Matematik er samtidig væsentlig i dagligdagen.« (ibid.)

Her gør beskrivelsen det klart, at matematik er meget vigtigt for en række andre videns- og aktivitetsområder. Igen uden at afgrænse faget for sig selv. Den følgende formulering lyder:

> »Den udbredte anvendelse af matematik bunder i fagets abstrakte natur og afspejler den erfaring, at mange vidt forskellige fænomener opfører sig ensartet. Når hypoteser og teorier formuleres i matematikkens sprog, vindes der ofte herved ny indsigt.« (ibid.)

Her nævnes lidt om at faget har en ”abstrakt natur” som fundament for sin anvendelighed, samt at matematikken har et sprog, hvori ”hypoteser og teorier” kan formuleres. Faget søges således igen beskrevet ved nogle udefra betragtede egenskaber, frem for ved sit indhold. Formuleringen afsluttes med:

> »Matematik har ledsaget kulturens udvikling fra de tidligste civilisationer og menneskenes første overvejelser om tal og form. Videnskabsfaget matematik har udviklet sig i en stadig vekselvirkning mellem anvendelser og opbygning af teori.«

Her fremhæves først og fremmest faget som et kulturelt og historisk fænomen. Noget der har udviklet sig over tid. Det er en særlig ting ved matematik, at fagets historie ikke blot ses som en bagvedliggende udvikling frem mod dets nutidige tilstand, men i sig selv opfattes som en del af faget. Tilsvarende ses ikke i de øvrige fagbilags identitetsafsnit.

Derudover rummer formuleringen to nærmest implicitte pointer. For det første at matematik har noget at gøre med ”tal og form”. For det andet at faget har *en teori*. I identitetstermer kan man altså sige, at fagets *anvendelse* og det at anskue faget historisk, kulturelt og samfundsmæssigt bliver til to bærende pointer i beskrivelsen. Altså stor tyngde i *med*-dimensionen og dertil tyngde i *om*-dimensionen, mens karakteristikken af faget i sig selv – genstandsfelt, teori, sprog, natur, mv. – sker sekundært i forbindelse med de to andre dimensioner. Vi kan tale om en lille tyngde i *i*-dimensionen.

Det er i øvrigt værd at bemærke, at andre fags eksplicitte fagidentiteter netop har et klart *genstandsfelt* for faget (se afsnit 3.3), mens det er ret særligt for matematik ikke at have det. Ligeledes har de andre fag fra gymnasiets naturfaglige fakultet beskrivelser af de metoder der kendetegner dem (se afsnit 3.3), mens det for matematik mest omtales at der findes metoder. Det forekommer altså læreplanen langt sværere at sætte ord på matematik som sådan, end det er tilfældet for andre fag.

Den efterfølgende formålsbeskrivelse lyder:

> »Gennem undervisningen skal eleverne opnå kendskab til vigtige sider af matematikkens vekselvirkning med kultur, videnskab og teknologi. Endvidere skal de opnå indsigt i, hvorledes matematik kan bidrage til at forstå, formulere og behandle problemer inden for forskellige fagområder, såvel som indsigt i matematisk ræsonnement. Herved skal eleverne blive i stand til bedre at kunne forholde sig til andres brug af matematik samt opnå tilstrækkelige kompetencer til at kunne gennemføre en videregående uddannelse, hvori matematik indgår.« (ibid., afsnit 1.2)

Også her tales mest om *med*- og *om*-aspekter. Det *i*-aspekt der nævnes er ”indsigt i matematisk ræsonnement”. Men også her er der mere tale om en ydre karakteristik, end en egentlig indholdsbeskrivelse. Også for formålsbeskrivelsen synes der altså at være størst tyngde i *med*- og *om*-dimensionen, mens *i*-dimensionen fremstår med en meget lille tyngde.

I afsnittet ”faglige mål” beskrives som sagt ”hvad eleverne skal kunne”. Altså en række *kompetencer*. I alt opstilles 10 mål, som analyseres et ad gangen i følgende oversigt.

#	Tekst	Bemærkninger	*I*	*M*	*O*
	2.1 Faglige mål. *Eleverne skal kunne:*	[afsnitsoverskrift]			
1	»håndtere formler, herunder kunne oversætte mellem symbolholdigt og naturligt sprog, og selvstændigt kunne anvende symbolholdigt sprog til at beskrive variabelsammenhænge og til at løse problemer med matematisk indhold«	Fokus på færdigheder, idet der tales om ”håndtere formler” og ”symbolholdigt sprog”. Lidt på problemløsning. Lidt *med*-dimension, men det er svært at afklare hvordan.	**a**, b	*?*	
2	»anvende simple statistiske eller sandsynlighedsteoretiske modeller til beskrivelse af et givet datamateriale eller fænomener fra andre fagområder, gennemføre hypotesetest, kunne stille spørgsmål ud fra modeller, have blik for hvilke svar, der kan forventes, samt være i stand til at formulere konklusioner i et klart sprog«	Tyngde især i *med*-dimensionen i *service*, idet fokus ligger på at omgås situationer med behov for matematisk hjælp. ”Anvende simple” peger på færdigheder i *i*-dimensionen.	a	**k**	
3	»anvende funktionsudtryk og afledet funktion i opstilling af matematiske modeller på baggrund af datamateriale eller viden fra andre fagområder, kunne forholde sig reflekterende til idealiseringer og rækkevidde af modellerne, kunne analysere givne matematiske modeller og foretage simuleringer og fremskrivninger«	Fokus på færdigheder (”anvende”), som skal trænes på en anvendt bane, dvs. *motivation*. Delen om at ”analysere” peger dog mere i retning af *service*.	**a**	*j*, k	
4	»anvende forskellige fortolkninger af stamfunktion og forskellige metoder til løsning af differentialligninger«	”Anvende” og ”metoder” peger på færdigheder, mens ”forskellige fortolkninger” peger på begrebskendskab.	**a**, e		
5	»opstille geometriske modeller og løse geometriske problemer, samt kunne give en analytisk beskrivelse af geometriske figurer i koordinatsystemer og udnytte dette til at svare på givne teoretiske og praktiske spørgsmål«	Fokus på problemløsning, ofte udført på anvendte situationer, dvs. *motivation*.	**b**	j	
6	»redegøre for matematiske ræsonnementer og beviser samt deduktive sider ved opbygningen af matematisk teori«	Fokus på *ræsonneret retfærdiggørelse*.	**c**		
7	»demonstrere viden om matematikanvendelse inden for udvalgte områder, herunder viden om anvendelse i behandling af en mere kompleks problemstilling«	Servicefunktion. Fokus på at vide noget om etablerede anvendelser.		**k**	
8	»demonstrere viden om matematikkens udvikling i samspil med den historiske, videnskabelige og kulturelle udvikling«	Fokus på matematikken og ”udviklingen” – dvs. *intern refleksion*.			**r**
9	»demonstrere viden om fagets identitet og metoder«	Intern refleksion – at vide noget ”om matematik”.			**r**
10	»anvende it-værktøjer til løsning af givne matematiske problemer«	Færdigheder	**a**		

Analysen kan sammenfattes i følgende skema:

Dimension (i alt)	**I** (9)						**Med** (5)				**Om** (2)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	4	1	1	0	0	0	0	0	2	0	2	0	0
Mellem tyngde	1	1	0	0	1	0	0	1	1	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Sum	**5**	**2**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**	**2**	**3**	**0**	**2**	**0**	**0**

Tabel 5.9) Analyse af faglige mål i læreplanen fra 2010.

På samme måde angives i afsnittene om kernestof og supplerende stof hvad eleverne "skal vide" – det vil sige hvilket fagligt stof de skal være præsenteret for. Kernestoffet er i 10 punkter, mens det supplerende lægger yderligere 5 punkter til.

#	**Tekst**	**Bemærkninger**	***I***	***M***	***O***
	2.2 Kernestof. *Kernestoffet er:*	[afsnitsoverskrift]			
1	»regningsarternes hierarki, det udvidede potensbegreb, rationale og irrationale tal, ligningsløsning med analytiske og grafiske metoder og med brug af it-værktøjer«	Størst fokus er nok på færdigheder i ligningsløsning, mens der også indgår begrebskendskab.	**a**, e		
2	»formeludtryk til beskrivelse af ligefrem og omvendt proportionalitet samt polynomielle sammenhænge, eksponentielle sammenhænge og potenssammenhænge mellem variable«	Primært fokus på en række begreber, som understøttes af færdigheder i brug af deres formeludtryk.	a, **e**		
3	»simple statistiske metoder til håndtering af et datamateriale, grafisk præsentation af et statistisk materiale, empiriske statistiske deskriptorer, stikprøvers repræsentativitet og chi-i-anden test«	En række færdigheder inden for statistik og sandsynlighed, bakket op af visse begreber.	**a**, e		
4	»forholdsberegninger i ensvinklede trekanter og trigonometriske beregninger i vilkårlige trekanter, vektorer i to og tre dimensioner givet ved koordinatsæt, anvendelser af vektorbaseret koordinatgeometri til opstilling og løsning af plan- og rumgeometriske problemer«	Færdigheder.	**a**		
5	»begrebet f(x), karakteristiske egenskaber ved følgende elementære funktioner: lineære funktioner, polynomier, eksponential-, potens- og logaritmefunktioner, cosinus og sinus, karakteristiske egenskaber ved disse funktioners grafiske forløb, anvendelse af regression«	Fokus på *teoriforståelse*, i det en række nævnte objekter skal kunne beskrives teoretisk ("karakteristiske egenskaber"). Dertil *begreber* og lidt færdigheder.	*a*, **d**, e		
6	»definition og fortolkning af differentialkvotient, herunder væksthastighed og marginalbetragtninger, afledet funktion for de elementære funktioner samt regnereglerne for differentiation af f + g, f - g, k · f, f · g og f ° g, udledning af udvalgte differentialkvotienter«	Fokus på begrebet *differentialkvotient*. I tillæg en række færdigheder i omgangen og et element af *ræsonneret retfærdiggørelse*.	a, *c*, **e**		
7	»monotoniforhold, ekstrema og optimering samt sammenhængen mellem disse begreber og differentialkvotient«	Fokus på færdigheder til brug ved funktionsanalyse. Tillige lidt begreber og motivation.	**a**, *e*	k	

8	»stamfunktion for de elementære funktioner, ubestemte og bestemte integraler, regneregler for integration af f + g, f - g og k · f samt integration ved substitution, bevis for sammenhængen mellem areal- og stamfunktion, rumfang af omdrejningslegemer«	Fokus på færdigheder i anvendelser af *stamfunktion*, samt i tillæg dertil fokus på begrebet.	**a**, e		
9	»lineære differentialligninger af 1. orden og logistiske differentialligninger, kvalitativ analyse af givne differentialligninger samt opstilling af simple differentialligninger«	Færdigheder i omgang med differentialligninger.	**a**		
10	»principielle egenskaber ved matematiske modeller, modellering.«	Fremstår mest som et ”om” aspekt, med fokus på videnskabsteori.			**s**
	»2.3 Supplerende stof *(…)* *For at eleverne kan leve op til alle de faglige mål, skal det supplerende stof (…) blandt andet omfatte sammenhængende forløb:«*	[Afsnitsoverskrift og tekst.]			
11	»med vægt på ræsonnement og bevisførelse inden for infinitesimalregning samt deduktive forløb over udvalgte emner«	Fokus på ræsonneret retfærdiggørelse.	**c**		
12	»om differentialligningsmodeller«	Fokus på modeller med matematisk indholdskrav.		**j**	
13	»med anvendelse af yderligere mindst én type statistisk eller sandsynlighedsteoretisk model«	Fokus på modeller med matematisk indholdskrav		**j**	
14	»med bearbejdning af autentisk talmateriale«	Fokus på anvendelse med ikke-matematisk indholdskrav.		**k**	
15	»om matematik-historiske emner.«	Intern refleksion.			**r**

Analysen kan sammenfattes i følgende skema:

Dimension (i alt)	**I** (19)						**Med** (4)				**Om** (2)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	6	0	1	1	2	0	0	2	1	0	1	1	0
Mellem tyngde	2	0	0	0	4	0	0	0	1	0	0	0	0
Lille tyngde	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**9**	**0**	**2**	**1**	**7**	**0**	**0**	**2**	**2**	**0**	**1**	**1**	**0**

Tabel 5.10) Analyse af kernestof of supplerende stof i læreplanen fra 2010.

Skal man sammenfatte læreplanens tre identitetsmarkører – identitet/formål, faglige mål og stof – så har de altså ret forskellige vægtninger. Hvor identitet/formål har en forskydning mod *med*- og *om*-dimensionen, så er de faglige mål mere klart orienteret mod *i*-dimensionen og ser man på stofbeskrivelsen bliver denne orientering endnu tydeligere. Og afgrænser man analysen af stoffet yderligere til kernestoffet, vil *i*-dimensionen stå næsten helt alene.

Den fagidentitet der udtrykkes af læreplanen som sådan, må altså siges at være meget uklar, hvilket dækker over at forskellige dele har klare men forskelligartede fagidentiteter. Dette kan tolkes som ønsket om som helhed at signalere uklarhed, eller som at læreplanen i praksis giver den enkelte praktiker valgfrihed mellem tre ret forskelligartede identiteter.

Vejledningen

Vejledningen er bygget op i seks kapitler: 0) Introduktion, 1) Fagets identitet og metoder, 2) Tilrettelæggelse, 3) De enkelte faglige emner, 4) Evaluering og 5) Hvad er matematik? – fagets identitet og metoder. Som det ses er kapitel 1 og 5 umiddelbart beslægtet, mens især 2 og 3 forholder sig til undervisningens indhold. Kapitel 4 er af mere praktisk art og vil ikke blive behandlet yderligere her.

Kapitel 1 er meget kort og understreger især pointen »at der ikke alene skal undervises *i* matematik, men også *om* matematik« (UVM 2010b, afsnit 1). Dette må opfattes som en eksplicit besked om, at systemets fagidentitet breder faget udover *teori*-dimensionen.

Kapitel 2 er længere og opdelt i en lang række afsnit: 2.1) Den indledende undervisning - grundforløbet, 2.2) Planlægning af studieretningsforløbet, 2.3) Undervisning i færdigheder, 2.4) Undervisningsdifferentiering, 2.5) Den eksperimentelle tilgang, 2.6) It – matematiske værktøjsprogrammer, 2.7) Temaopgaver, 2.8) Skriftlighed, 2.9) Mundtlighed og 2.10) Lektier.

Første linje i kapitel 2: »*Begrebsindlæring og udvikling af evne til at anvende de matematiske begreber er en kompliceret proces*« og senere i samme afsnit: »*Eleverne skal skabe og udvikle deres matematiske begrebsapparat, så de kan aktivere det i relevante situationer*« (*ibid*, kapitel 2). Indgangen til afsnittet peger altså i retning af tyngdepunktet *begrebsforståelse*.

I afsnittene 2.1 og 2.2 om tilrettelæggelse af hhv. grundforløb og studieretningsforløb, lægges der især vægt på samarbejdet med andre fag. I afsnit 2.1 hedder det f.eks.:

> »Det er ikke god planlægning blot at følge lærebogen fra side 1 og fremefter. Planlægning af den indledende undervisning indebærer, at der tages kontakt til de øvrige lærere, klassen har, for at få de første gensidige overvejelser om fagligt samarbejde« (*ibid*, afsnit 2.1)

Det er altså ikke matematikfaget – her repræsenteret ved lærebogen – der skal styre indholdet, men derimod hvad der kan findes fodslag om med de øvrige fag. Dette underbygges videre i afsnit 2.2:

> »Gymnasiet er *et studieretningsgymnasium*, hvor det faglige samarbejde skal spille en central rolle. Det faglige samarbejde skal i almindelighed bidrage til, at eleverne opnår en dybere indsigt i matematikkens rolle aktuelt og historisk i behandlingen og løsningen af alskens problemer.« (*ibid*, afsnit 2.2).

Der sker altså i de overordnede afsnit om tilrettelæggelse en orientering mod *anvendelses*-dimensionen, med tyngden især placeret i *motivations*-tyngdepunktet. Dette kommer til udtryk i formuleringer som »*samarbejde med NV og naturvidenskabelige fag om fx variabelsammenhænge, databehandling og regression*« (*ibid*, afsnit 2.1) og »*et samarbejde i mat-samf studieretninger om bestemte emner inden for variabelsammenhænge, om statistik og hypotesetest og sidenhen om økonomiske modeller*« (*ibid*, afsnit 2.2), hvor indholdet styres af begreber fra matematikfagets eget kernestof. Sidstnævnte eksempel bringer dog også lidt tyngde til *service*-tyngdepunktet, i det "økonomiske modeller" må opfattes som et indhold defineret af et andet fag.

I afsnit 2.3 beskrives "Undervisning i færdigheder", hvor der opremses en række konkrete færdigheder der skal være fokus på. Eksempelvis »*regningsarternes hierarki*«, »*formelhåndtering*«,

»*brøkregning*«, »*brug af koordinatsystemer*« og »*løsning af ligninger*« (*ibid,* afsnit 2.3). Denne eksplicitering af konkrete færdigheder giver stor tyngde til tyngdepunktet *færdighedstræning*.

Hvor de foregående afsnit i en vis forstand peger mod et bestemt tyngdepunkt, så viser følgende afsnit, at fagidentiteten også beskrives uklart:

> »Der er stor forskel på, hvilken form for indlæring eleverne foretrækker. Nogle elever vil helst regne opgaver, andre foretrækker at arbejde med beviser, og andre igen vil helst eksperimentere sig frem til ny viden. Det er vigtigt, at alle disse elevtyper stimuleres i undervisningen.« (*ibid*, afsnit 2.4)

Her fremstilles nogle af de centrale indholdsformer i matematikundervisningen som værktøjer til at stimulere eleverne. Indholdsformen skal i den forstand vælges så den stimulerer den konkrete elev. Det er altså ikke opfattelsen af matematik som ”det at regne opgaver” eller ”det at lave beviser” der styrer. Matematik er noget ubeskrevet andet end dette, som kan tilgås ved at gøre sådanne ting. Valget af aktivitet handler altså ikke om *hvad matematik er*, men om *hvem eleverne er*.

Også i afsnit 2.5 (eksperimenterende forløb), 2.6 (IT), 2.7 (temaopgaver), 2.8 (skriftlighed), 2.9 (mundtlighed) og 2.10 (lektier) ses et fokus på *hvordan* der skal arbejdes med matematik, mere end *hvad* der skal arbejdes med. Dette bidrager i sig selv til at give systemet en uklar fagidentitet. Afsnittene rummer dog alle identitetsbidrag.

Afsnit 2.5 præsenterer således to typer af eksperimenterende forløb. For det første en slags *begrebstilegnelse*, hvor eleverne skal identificere relevante sider af et bestemt begreb. F.eks. »*egenskaber for højder, medianer og midtnormaler i en trekant*« (*ibid*, afsnit 2.5.1). For det andet en metode til at undersøge principielle egenskaber ved modeller. F.eks. »*simulering af skattemodel*« (*ibid*). Det eksperimenterende synes altså især at lægge tyngde i *begrebsforståelse* og i *med*-dimensionen.

Afsnit 2.6 citerer fra læreplanen at forskellige IT-værktøjer skal være »*væsentlige hjælpemidler i elevernes arbejde med begrebstilegnelse og problemløsning*«. Dertil nævnes »*udføre beregninger*«, »*symbolsk manipulation af formeludtryk*«, »*håndtering af statistisk datamateriale*«, »*overblik over grafer*«, »*ligningsløsning*« og »*symbolsk differentation og integration samt til løsning af differentialligninger*« (*ibid*, afsnit 2.6). Der er altså intentioner i retning af tyngdepunkter som *begrebsforståelse* og *problemløsning*, mens det der konkret nævnes har karakter af *færdighedstræning*. Vejledningen tilføjer ikke selv andet end rent lavpraktiske overvejelser til uddraget fra læreplanen.

Afsnit 2.7 om de såkaldte temaopgaver er ret centralt, fordi intentionen med disse er at de skal være grundlag for mundtlig eksamination. Det meste af afsnittet går med at afgrænse hvad ordet ”temaopgave” dækker over, men der optræder også følgende formulering:

> »Temaopgaven formuleres af læreren og bør altid rumme både matematisk ræsonnement[…], anvendelser gennem opgaveregning og behandling af mere komplekse problemer. (*ibid.*, afsnit 2.7)«

Her lægges stor tyngde i *teori*-dimensionens tyngdepunkter om *ræsonneret retfærdiggørelse* samt tillige i *færdighedstræning* og *problemløsning*. Hvor vidt ordet ”anvendelser” henviser til anvendelse af teori på konkrete beregninger eller på anvendelse udenfor matematikken selv, er uklart. Men uden referencer til noget ekstramatematisk, sender formuleringen umiddelbart signal om det første.

I afsnit 2.8, 2.9 og 2.10 beskrives den rolle som skriftlighed, mundtlighed og lektier skal spille i undervisningen. Om skriftlighed hedder det:

> »…arbejdet med temarapporter, hvor eleverne selv organiserer stoffet til den mundtlige prøve, [skal] udformes, så det støtter begrebsindlæringen og evnen til at formidle et kompliceret stof« (*ibid*, afsnit 2.8).

Om mundtlighed hedder det:

> »*Eleverne skal tale matematik*. I klassens diskussioner om nye matematiske begreber og metoder, og i pararbejde og gruppearbejde, hvor de både skal diskutere opgaveløsning og matematiske beviser og ræsonnementer. Eleverne møder nye ord og begreber næsten i hver eneste time, og det tager tid at forstå dem og lære at bruge dem…
>
> Meget af dette foregår bedst i *gruppearbejde*, hvor eleverne først skal diskutere en strategi for løsning af et stillet problem, før de kaster sig ud i det. Lad dem diskutere en fremgangsmåde til at beregne afstande og højder ude i et terræn…« (*ibid*, afsnit 2.9)

Om lektier står der:

> »Det er vigtigt at eleverne er klar over formålet med lektielæsning: Skal de træne færdigheder via nogle opgaver? Skal de indøve metoder, som de helst skal kunne huske udenad? Hvilke matematiske begreber i teksten, som de skal læse, skal de kunne redegøre for med eget sprog? […] [Hvad] forventes af dem i timen? Skal de blot forberede sig til en gennemgang af nyt stof, eller skal de fx i grupper gennemgå eksempler eller små beviser for hinanden?« (*ibid*, afsnit 2.10).

I alle tre afsnit synes der at blive lagt særlig tyngde i *begrebsforståelse*. Dertil kommer *færdighedstræning*, typisk i form af opgaveregning, samt *ræsonneret retfærdiggørelse*, typisk i form af beviser. Der omtales dog også *problemløsning*, som oftest eksemplificeres ind i en anvendelseskontekst, typisk i noget der giver tyngde til *med*-dimensionens *service*-tyngdepunkt.

Det samlede afsnit 2 om undervisningens tilrettelæggelse synes altså at lægge stor tyngde i *i*-dimensionens tyngdepunkt *begrebsforståelse* samt mellemtyngde i tyngdepunkterne *ræsonneret retfærdiggørelse* og *færdighedstræning*og tillige lille tyngde i *problemløsning*. Der synes til gengæld ikke at være udtalt fokus på *teoriforståelse* og *konventionskendskab*. Afsnittet lægger tillige tyngde i *med*-dimensionen. Mest på *motivation*, men også i mindre grad på *service*. Derimod optræder *om*-dimensionen ikke i afsnittet.

Vejledningens afsnit 3 handler om ”de enkelte faglige emner” og er inddelt i seks underafsnit: 1) Ligninger, 2) Statistik og sandsynlighedsregning, 3) Funktioner, grafer og variabelsammenhænge, 4) Differentialregning, integralregning og differentialligninger, 5) Geometri og vektorer og 6) Matematisk ræsonnement. Indholdet er »*supplerende kommentarer*« til læreplanens faglige stof.

I afsnit 3.1 om ligninger indledes der således:

> »I alle fag, der anvender matematik, indgår løsning af ligninger eller ligningssystemer. Eksempler fra andre fag bør jævnligt inddrages for at illustrere, hvordan samme matematiske problem, kan have forskellige fremtrædelsesformer…« (*ibid*, afsnit 3.1).

Her lægges tyngde i *med*-dimensionens tyngdepunkt *service*, fordi der umiddelbart er tale om eksempler hvis indhold styres af andre fag, indenfor en faglig ramme sat af matematikfaget. Rammen er således ”ligninger og ligningssystemer”, mens indholdet afgøres af eksemplet hentet i ”et andet fag”. Der nævnes endvidere i afsnit 3.1:

> »Det forventes i øvrigt, at eleverne kan håndtere spørgsmål som:
> - for hvilke tal c har ligningen $f(x) = c$ netop én løsning?
> - angiv for enhver værdi af konstanten a antallet af løsninger til ligningen…« (*ibid*, afsnit 3.1)

Dette er et eksempel på tyngde lagt i *færdighedstræning*, i det der beskrives en ganske velafgrænset opgavetype, som eleven forventes at kunne løse. Indledningen i afsnit 3.2 om statistik og sandsynlighedsregning minder om førnævnte, i det der bl.a. siges:

> »Hvor det er muligt, er det en stor fordel for indlæring af begreber og metoder, at det foregår i et samarbejde med andre fag som samfundsfag, idræt eller biologi, hvorfra et talmateriale tilvejebringes« (*ibid*., afsnit 3.2).

Også her lægges tyngden i høj grad i anvendelsesdimensionen, hvor balancen mellem *motivation* (andre fag leverer ”motiverende tal” til rent matematisk arbejde) og *service* (matematik hjælper andre fag med at svare på deres egne matematisk velafgrænsede spørgsmål) er uklar. Der gives dog også en liste af begreber som eleven skal »*kende og kunne anvende*« i forbindelse med »*statistisk hypotesetest med brug af chi-i-anden fordelingen*«. Eksempelvis »*population og stikprøve*«, »*nulhypotese og alternativ hypotese*«, »p-*værdier*«, »*frihedsgrader*« og »*repræsentativitet og systematisk fejl (bias) samt skjulte variable (konfundering)*« (*ibid*.). Her lægges tyngde i *teori*-dimensionen på tyngdepunktet *begrebskendskab*.

I afsnit 3.3 og 3.4 indledes der med formuleringer om at trække på modellering og anvendelse. Afsnit 3.3 indledes således med sætningen: »*Funktionsbegrebet* […] *kan blive introduceret og studeret under arbejdet med modellering, matematisering og løsning af nye problemtyper*« (*ibid*., afsnit 3.3) og afsnit 3.4 indledes med: »*Matematisk modellering* […] *bør inddrage eksempelmaterialer fra andre fag*« (*ibid*., afsnit 3.4). Her lægges der altså også tyngde i *med*-dimensionen, omend det i modsætning til afsnit 3.2 lægges mere entydigt i *motivations*-tyngdepunktet.

I afsnit 3.3 indgår tillige en beskrivelse af begreber som eleven skal kunne bruge til at beskrive »*karakteristiske egenskaber*« ved »*de elementære funktioner*« (f.eks. definitionsmængde, monotoniforhold og fremskrivningsfaktor). Her er der altså tale om tyngde i *begrebskendskab*. Dertil kommer tyngde i teoriforståelse i form af eksempelvis betydningen af »*konstanter i regneforskrifter*« og »*sammenhæng mellem grad og antal nulpunkter for polynomier*«. Og endeligt optræder enkelte tyngdebidrag til færdighedstræning, f.eks. »regneregler for logaritmefunktioner« (*ibid*., afsnit 3.3).

Afsnit 3.5 om ”geometri og vektorer” har i modsætning til de foregående stort set ingen henvisning til det anvendte. Det nævnes at eleverne skal kunne »*opstille geometriske modeller*«, uden at dette konkretiseres. Afsnittet omtaler endvidere kort kendskab til få begreber (»højder, medianer og vinkelhalveringslinjer«), men er i hovedsagen oplistninger af konkrete færdigheder. Eksempelvis »*at finde tværvektor til en given vektor i planen*«, »*at kunne finde projektionen af en vektor på en vektor*«, »*opstille og omskrive ligninger for cirkler og kugler samt bestemme tangenter og tangentplaner*« og »*bestemme vinkler mellem linjer, mellem linjer og planer og mellem to planer*« (*ibid*., afsnit 3.5). Afsnittet lægger altså stor tyngde i *færdighedstræning*.

Kapitlets sidste afsnit, 3.6, om "Matematisk ræsonnement" adskiller sig ved ikke at være stofafgrænset. I afsnittets første del hedder det bl.a. at elever skal opnå:

> »…en sådan fortrolighed med matematisk tankegang, at de i en problembehandling umiddelbart vil skelne mellem, *hvad man ved, hvad man antager*, og *hvad man ønsker at vide*. Det gælder, uanset om emnet er ren matematisk teori, eller det drejer sig om anvendelse af matematik til løsning af givne problemer.« (*ibid*., afsnit 3.6)

Og i den følgende del hedder det, at det forventes:

> »…at eleverne opnår en sådan indsigt i fagets deduktive natur, at de uden vanskeligheder forstår at *skelne mellem forudsætninger, definitioner og sætninger*, samt at de kan redegøre for, dvs. selvstændigt fremlægge, de *bærende ideer i en række centrale beviser* inden for forskellige af fagets områder.« (*ibid.*)

Hvor det første citat peger i retning af et tyngdepunkt som *problemløsning* og potentielt også over i *service* eller *værktøj* i *med*-dimensionen, så peger begge citater – det andet meget entydigt – i retning af stor tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*, hvor fokus ligger mere på det matematiske argument end på den matematiske substans.

Kapitel 3 bidrager overordnet set til at skabe en *uklar* fagidentitet. Der synes dog at være en tendens til at lægge stor tyngde i *med*-dimensionen, om end det varierer lidt mellem tyngdepunkterne *motivation* og *service*. I *i*-dimensionen lægges størst tyngde i *begrebskendskab* og dertil mindre tyngde i *færdighedstræning*, *teoriforståelse*, *problemløsning* og *ræsonneret retfærdiggørelse*. Der optræder ingen tyngdebidrag til *om*-dimensionen i kapitlet.

Kapitel 4 handler om evalueringsformer og vil ikke blive givet en særskilt behandling her, i det den væsentligste indflydelse beskrives i afsnittet om bagudstyrende dokumenter. Kapitel 5 er derimod interessant, fordi det bærer overskriften "Hvad er matematik – fagets identitet og metoder". Kapitlet tilkendegiver altså på sin vis at ville beskrive netop *fagets identitet* (i ental!).

Kapitlet består af otte afsnit: 1) Matematisk tankegang, 2) Matematisk sprog, 3) Matematikkens udvikling, 4) Matematisk ræsonnement, 5) Vekselvirkning mellem anvendelser og teoribygning, 6) Den æstetiske dimension, 7) Matematisk modellering og 8) Matematikkens hjælpemidler. Det er i høj grad en *meta*-beskrivelse af faget, som tager afsæt i forskellige filosofiske og historiske refleksioner over fagets karakter og udvikling, samt matematiske objekters særlige karaktertræk.

I kapitel 5.1 om "Matematisk tankegang" kan man således læse udsagn som »*Der findes hverken tal eller trekanter, variable eller koordinatsystemer i naturen. De er skabt af mennesker*«, »*Tallenes kulturhistorie rummer gode muligheder for et fagligt samarbejde*« og »*Hvad forstås ved så enkle udtryk som 2 + 3 = 5? Sandhedsværdien afhænger af, hvad tallene er symboler for.*« (*ibid*, afsnit 5.1). Disse udsagn peger alle i retning af *om*-dimensionens tyngdepunkt *intern refleksion*. Men også et tekststykke som følgende:

> »Tallenes beskrivelseskraft er så stor, at de rummer farer for forførelse. Jo større *muligheder* for forenklet beskrivelse og jo mere omfattende regnekraft, jo større tiltrækning kan sådanne metoder rumme, og desto vigtigere er det at inddrage *de begrænsninger* en sådan beskrivelse rummer: Hvad gemmer sig bag gennemsnittet? Kan egenskaber virkelig beskrives lineært på en skala fra 1 til 10? Kan sundhed udtrykkes i et BMI-tal?« (*ibid.)*

Her er vi i samme dimension, men i tyngdepunktet *samfundsfunktion*, i det fokus ikke ligger på fagets interne forhold, men på dets funktioner i samfundsmæssig kontekst. Et lignende indhold med referencer til historie og mere videnskabsteoretiske refleksioner ses i afsnit 5.2, 5.3, 5.4, 5.5 , 5.6 og 5.8. I alle afsnit indgår naturligvis identitetsbidrag med tyngde i både *i*- og *med*-dimensionen indirekte i form af substansen i det der reflekteres over, men som teksten står, er der i hovedsagen tale om refleksioner *om matematik*. Størst tyngde er der i tyngdepunktet *intern refleksion*.

I kapitel 5.7 laves en meta-præsentation af modelleringsbegrebet, hvor der gennemgås faser af en modellering som »*matematisering*«, »*informationstab*«, anvendelse af »*relevante matematiske metoder til at behandle den matematiske model og løse de matematiske problemer*«, »*validering*« og »*kommunikation*« (*ibid.*, afsnit 5.7). Her lægges tyngde i *om*-dimensionens tyngdepunkt *videnskabsteori*, idet fokus er på matematikkens rolle som metodisk værktøj i andre fag eller aktivitetsområder.

Ser man på vejledningen som helhed, optræder de tre kapitler 2, 3 og 5 umiddelbart med størst tyngde i hver sin dimension – hhv. *i*, *med* og *om*. I *i*-dimensionen lægges der samlet set stor tyngde i *begrebskendskab*, mens der lægges mellem tyngde i *færdighedstræning* og *ræsonneret retfærdiggørelse* og lille tyngde i *problemløsning* og *teoriforståelse*, mens *konventionskendskab* nærmest ikke optræder. *Med*-dimensionen optræder tydeligt, om end mere indirekte, med størst tyngde i *motivation* og tillige en vis tyngde i *service*. *Illustration* og *værktøj* optræder til gengæld stort set ikke. Endeligt optræder *om*-dimensionen nærmest kun i kapitel 5, hvor den til gengæld er dominerende, med størst tyngde i *intern refleksion*, men også tyngde i de øvrige to tyngdepunkter.

Samlet set må kapitel 2 og 3 vurderes til at være de vigtigste bidrag, fordi de omhandler *tilrettelæggelse* og *fagligt indhold* – altså konkrete anvisninger. Kapitel 5 er derimod af en meget mindre forpligtende karakter og må derfor i det store hele antages at have meget mindre identitetsskabende effekt. Vejledningen giver altså stor tyngde til *begrebskendskab* og lægger en vis tyngde i *med*-dimensionen, særligt i *motivations*-tyngdepunktet.

5.2.2 Eksamensopgaver 2011, 2012 og 2013

Den skriftlige eksamen for A-niveauet består af én samlet prøve på 5 timer, delt op i to delprøver. Første delprøve består af 6 opgaver med hver ét spørgsmål. Denne delprøve skal afleveres efter en times arbejde. I denne første time må eleverne ikke bruge nogen form for hjælpemiddel. Anden delprøve består af 7-10 opgaver, med i alt 19 spørgsmål. I de sidste 4 timer må eleven betjene sig af et hvert tænkeligt hjælpemiddel, blot der ikke kommunikeres med andre. Spørgsmålene skal alle stilles inden for *kernestoffet* (UVM 2010, bilag 35: ”Matematik A”, afsnit 3.3).

Ved hver sommereksamen i maj afholdes to A-niveau-eksamener, hvor den enkelte eksaminand deltager i én af dem. Der eksisterer derfor to uafhængige eksamenssæt fra hvert år. I det følgende er de navngiver sådan, at det tidligste af de to sæt kaldes ”sæt a”, mens det seneste kaldes ”sæt b”.

Analysen af sættene er sammenfattet i følgende tabel 5.11 (se hele analysen i bilag A.9):

Dimension (i alt)	**I** (108)						**Med** (44)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	75	3	0	8	2	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	5	5	0	0	4	0	12	25	3	0	0	0	0
Lille tyngde	0	5	0	0	1	0	0	0	4	0	0	0	0
Sum	**80**	**13**	**0**	**8**	**7**	**0**	**12**	**25**	**7**	**0**	**0**	**0**	**0**

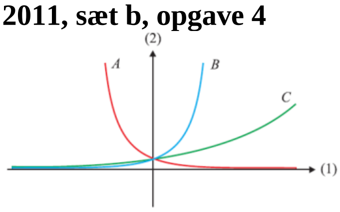
Tabel 5.11) Analyse af eksamensopgaver for "A-niveau" maj/juni 2011, 2012 og 2013.

Som det fremgår af tabellen er der også på dette tidspunkt en særlig høj grad af tyngde i *færdighedstræning*. Herunder ses fem opgaver som i *i*-dimensionen alene har stor tyngde i dette tyngdepunkt.

2012, sæt a, opgave 1. Reducér udtrykket $(a-b)(a+b)-2a^2+b^2$ (UVM 2012) **2011, sæt a, opgave 1.** Løs ligningen $x^2+x-12=0$. (UVM 2011) **2013, sæt a, opgave 2.** Grafen for en lineær funktion $f(x)=ax+b$ går gennem punkterne $A(3,4)$ og $B(5,10)$. Bestem tallene a og b. (UVM 2013)	**2013, sæt b, opg. 2.** I en model kan udviklingen i antallet af rådyr i et bestemt område i Danmark beskrives ved funktionen $N(t)=25000\cdot 1{,}03^t$, hvor $N(t)$ beskriver antallet af rådyr til tidspunktet t (målt i år efter år 2000). Gør rede for betydningen af tallene i forskriften for $N(t)$. (UVM 2013a)	**2012, sæt b, opg. 9** I en trekant ABC er $\|AB\|=22{,}4$, $\|BC\|=12{,}8$ og $\|AC\|=28{,}0$. a) Bestem $\angle ACB$ samt arealet af trekant ABC. Højden fra B skærer siden AC i punktet D, og medianen fra B skærer siden AC i punktet E. b) Skitsér en model af situationen, og bestem $\|DE\|$. (UVM 2012a)

De tre til venstre er simple beregningsopgaver fra delprøven uden hjælpemidler. De to første er typiske færdigheder, mens den anden kræver at man husker to-punktsformlen for lineære sammenhænge. Opgaven kan naturligvis løses på andre måder, men opgavetypen er så almindelig, at det er oplagt at træne som særlig færdighed. Også opgaven i midten har færdighedskarakter, fordi den er typisk, selvom den isoleret set kunne udlægges anderledes. Og opgaven til højre er en typisk trigonometriopgave, som således også træner bestemte velafgrænsede færdigheder.

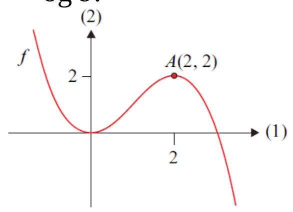
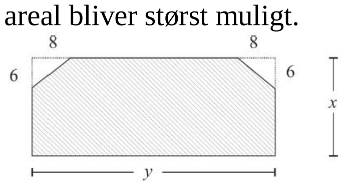
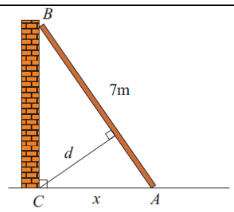
Derudover findes der et mindre antal opgaver med stor tyngde i teoriforståelse og begrebskendskab.

2012, sæt a, opgave 4 Bestem tallet c, så andengradsligningen $3x^2-2x+c=0$ har netop én løsning. (UVM 2012) **2013, sæt a, opgave 5** En funktion f er bestemt ved $f(x)=e^x+7x$. Gør rede for, at f er en voksende funktion. (UVM 2013)	**2011, sæt b, opgave 4**  Figuren viser grafen for funktionerne $f(x)=2^x$, $g(x)=0{,}5^x$ og $h(x)=1{,}2^x$. Gør rede for hvilken graf der hører til hvilken funktion. (UVM 2011a)	**2013, sæt a, opgave 16** En steg sættes til langtidsstegning i en ovn. I en model er stegens indre temperatur T (målt i °C) en funktion af tiden x (målt i minutter). Den hastighed, hvormed stegens indre temperatur stiger til tidspunktet x, er proportional med forskellen mellem ovnens temperatur og stegnes indre temperatur. Det oplyses, at ovnens temperatur er 150°C, og at proportionalitetskonstanten er 0,011. a) Opstil en differentialligning, som T må opfylde. (UVM 2013)

Opgaverne til venstre og i midten har alle stor tyngde i teoriforståelse, fordi de handler om at kunne se relationerne mellem forskellige begreber. Eksempelvis konstantled og antal løsninger samt funktionsforskrift og voksende funktion. De to opgaver yderst til venstre har endvidere mellem tyngde i færdighedstræning, fordi deres løsning bygger på mere standardagtige løsningsmåder.

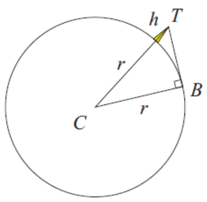
Opgaven til højre har stor tyngde i begrebskendskab fordi den bygger på indsigter i begreber som ”proportional” og ”differentialligning”. Besvarelsen sker således primært gennem kendskabet til begrebet, mens aktivering af typiske løsningsalgoritmer ikke spiller en væsentlig rolle.

Endeligt optræder der opgaver med tyngde i *problemløsning*. Her tre eksempler:

2012, sæt b, opgave 6 Funktionen f er givet ved $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2$. Grafen for f har et lokalt ekstremumspunkt i punktet $A(2,2)$. a) Bestem konstanterne a og b.  (UVM 2012a)	**2013, sæt b, opgave 6** På figuren ses et rektangel med sidelængder x og y, hvorfra der er afskåret to retvinklede trekanter med sidelængde 6 og 8. Den tiloversblevne skraverede figur har omkredsen 200. Bestem x og y, så figurens areal bliver størst muligt.  (UVM 2013a)	**2013, sæt a, opgave 15**  En 7 m lang stige er placeret op ad en lodret mur. stigens røringspunkt med jorden benævnes A, og stigens røringspunkt med muren benævnes B. Afstanden mellem stigen og murens fod benævnes d. Afstanden mellem murens fod og stigens fod benævnes med x, og det oplyses, at $0 < x < 7$. a) Gør rede for, at $\lvert BC \rvert = \sqrt{49 - x^2}$, og benyt dette til at vise, at $d = \frac{x \cdot \sqrt{49 - x^2}}{7}$. b) Bestem x, så d bliver størst mulig. (UVM 2013)

De to opgaver til venstre har begge stor tyngde i problemløsning. Fælles for dem er, at hovedopgaven består i at kunne organisere de skridt der er nødvendige for at løse opgaven, fordi ingen af opgaverne bygger på et udgangspunkt der er typisk. Opgaven til højre har stor tyngde i *færdighedstræning*, fordi hele spørgsmål b og dele af spørgsmål a bygger på standardløsninger. Der er dog elementer i spørgsmål a, som lægger mellem tyngde i *problemløsning*.

Udover at det er værd at bemærke hvor i *i*-dimensionen der er lagt tyngde, så er det også tydeligt at der er lagt en hel del tyngde i *med*-dimensionen. Dette gælder særligt i tyngdepunktet *motivation*, hvilket der gives to eksempler på her:

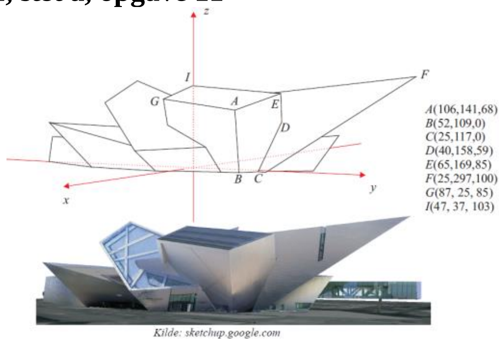
2011, sæt b, opgave 11 Højden h af verdens højeste bygning er 0,828 km. Sigtelinjen fra toppen T af bygningen til horisonten tangerer jorden i punktet B.  Størrelsesforholdene på figuren er ikke korrekte. Jordens radius r er 6371 km. Centrum af Jorden benævnes med C. a) Bestem $\angle TCB$. b) Bestem $\lvert TB \rvert$. UVM (2011a)	**2011, sæt b, opgave 13** SARS-epidemiens udvikling i Singapore i 2003 kan beskrives ved differentialligningen $\frac{dN}{dt} = 0{,}00526 \cdot N \cdot (209 - N)$, hvor N er antal smittede til tidspunktet t (målt i døgn). Det oplyses, at der efter 30 døgn var 103 smittede. a) Bestem væksthastigheden til det tidspunkt, hvor antal smittede var 100. b) Bestem $N(t)$, og gør rede for, hvad tallet 209 i modellen fortæller om epidemiens udvikling. UVM (2011a)

Begge opgaver har mellemtyngde i *motivation*. Det skyldes at begge foregår indenfor en ramme – udsyn fra højt hus hhv. SARS-epidemi – som fremstår autentiske. De spørgsmål der stilles er dog rent indholdsmæssigt stort set kun matematisk begrundet. Spørgsmål b i opgaven til højre har dog et aspekt af noget mere autentisk over sig, hvorfor denne opgave tillige har lille tyngde i *service*.

Endvidere havde en del opgaver tyngde i *illustration* og enkelte i *service*. Her er to eksempler:

<table>
<tr>
<td>

2012, sæt a, opgave 11



Kilde: sketchup.google.com

Figuren viser en model af Denver Museum indtegnet i et kooridnatsystem. Alle enheder er i feet.

a) Bestem en ligning for den plan α, der indeholder punkterne A, B og C.

Det oplyses, at planen β, der indeholder punkterne C, D og F, har ligningen

$$326x + 75y - 135z = 16925$$

b) Bestem vinklen mellem α og β.

c) Undersøg, om $\overrightarrow{AE}$ er parallel med $\overrightarrow{GI}$, og bestem arealet af tagfladen $AEIG$.

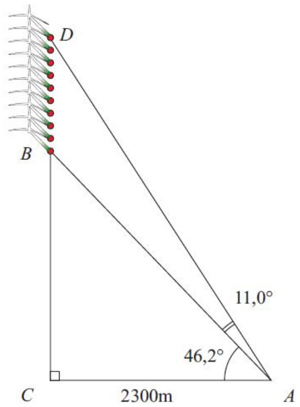
(UVM 2012)

</td>
<td>

2013, sæt b, opgave 11

set fra punkt *C*

set fra punkt *A*



Ovenfor ses to fotos samt en model af en vindmøllepark med ti møller set fra to forskellige steder på land, nemlig fra punktet *A* og punktet *C*. Afstanden mellem de to punkter er 2300 meter. Sigtevinklerne fra punktet *A* til den nærmeste mølle i punktet *B* og til den fjerneste mølle i punktet *D* er målt og angivet på figuren.

a) Bestem, hvor langt den nærmeste mølle er fra land, og bestem møllernes indbyrdes afstand.

(UVM 2013a)

</td>
</tr>
</table>

Opgaven til venstre har stor tyngde i *illustration*. Selvom der er tale om en autentisk bygning, så er rammen stadig valgt uden nogen anden begrundelse, end det rent matematiske. Opgaven beskriver simpelthen ikke en situation, hvor matematikken forekommer relevant. Opgaven til højre lægger stor tyngde i *service*. Rammen fremstår autentisk, men tilpasset de matematiske forventninger. Indholdet er til gengæld bestemt af situationen og formuleret i dens sprog. Opgaverne rummer i formuleringen tillige et aspekt af åbenhed, som må kendetegne en autentisk situation i denne kontekst.

Skal man give en overordnet vurdering af de aktuelle eksamensopgaver, så har de deres primære tyngde i *i*-dimensionen på *færdighedstræning*, men tillige også en markant tyngde i *med*-dimensionen, særligt i *motivation*. I *i*-dimensionen ses endvidere en del opgaver med tyngde i *problemløsning*, *begrebskendskab* og *teoriforståelse*. Især det sidste ses med stor tyngde. I *med*-dimensionen ses tillige et pænt antal opgaver med tyngde i *illustration*, mens der er en mere begrænset tyngde i *service*. Der optræder umiddelbart ikke tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse* og *konventionskendskab* i *i*-dimensionen eller *værktøj* i *med*-dimensionen, og der indgår slet ingen tyngde i *om*-dimensionen.

5.3 Samlet vurdering af fagidentiteter på systemdomænet

Det første og måske væsentligste indtryk af analysen af fagidentiteter på systemdomænet er, at der er tale om mange løse ender, der peger kaotisk i hver sin retning. Dette fortæller i sig selv noget om, at systemet ikke umiddelbart rummer klare identiteter. Det kan i den forstand virke en smule kunstigt at ville forsøge at flette enderne sammen til en egentlig konklusion. Ikke desto mindre vil det blive forsøgt har.

I første omgang lægges fokus på udviklingen i styredokumenterne. Analysen af 1935/1953-ordningen viste at tyngden stort set entydigt blev lagt i *teori*-dimensionen. Afvigelserne fra dette var størst i de mere abstrakte formålsbeskrivelser, mens de var få og små i pensumlisterne. Analysen af 1961/1971-ordningen viste en større tyngde i *anvendelses*- og *meta*-dimensionen end for den tidligere periode, særligt i pensumbeskrivelsen. Mens det for 1988/1999-ordningen umiddelbart forskydes tilbage mod *teori*-dimensionen, dog med få tunge identitetsbidrag i de øvrige dimensioner.

I den aktuelle 2005/2010-ordning synes der overordnet at ske en stor forskydning af tyngde fra *teori*-dimensionen i retning af de to øvrige dimensioner. Det er imidlertid et fragmenteret billede som i læreplanen er tydeligst for de mere abstrakte dele om identitet og formål, mens det er mindre tydeligt for stof-beskrivelserne og nærmest modsat tendens for kernestof-beskrivelsen. Også i vejledningen synes forskydningen især at være at finde i afsnittene om fagets indhold og fagets identitet, mens den er mindre tydelig i afsnittet om fagets tilrettelæggelse.

Overordnet set synes det altså at være en sikker konklusion, at der gennem de fire perioder sker en forskydning af tyngde fra *teori*-dimensionen til *anvendelses*- og *meta*-dimensionen. Det er derimod ikke sikkert, at dette er udtryk for en tydelig identitet med større balance mellem dimensionerne. De varierende tyngdefordelinger mellem de forskellige centrale afsnit af de aktuelle styredokumenter peger således mere i retning af en forskydning mod en meget *uklar* fagidentitet.

Udvider man fokus til også at omfatte eksamensopgaverne, skaber det dog en vis klarhed. F.eks. findes der ikke ét eneste identitetsbidrag med tyngde i *meta*-dimensionen i nogen af de analyserede perioder. Ser man derimod på fordelingen af tyngdebidrag mellem *teori*- og *anvendelsesdimensionen* er den omkring 1950 på 34-0, omkring 1970 på 47-4, omkring 1980 på 59-15, omkring 2000 på 77-10 og omkring 2010 på 108-44.

I det eksamensopgaverne her opfattes som en meget stærkt retningspil for hvilken fagidentitet der i praksis udfolder sig på *systemdomænet*, må det således være en sikker overordnet konklusion, at der over hele perioden er sket en forskydning af tyngde fra *teori*- til *anvendelses*-dimensionen, selvom der er en kort modbevægelse fra 1980 til 2000.

Udvides vurderingen til at omhandle nuanceringen af de enkelte dimensioner, så viser analysen af 1935/1953-ordningens styredokumenter gennemgående stor tyngde i *færdighedstræning*. I de mere abstrakte dele synes der derudover at være lidt mere uklart fokus på andre punkter. Ser man derimod på de mere konkrete pensumlister, er der også en betragtelig tyngde i *begrebskendskab*. Antallet af bidrag er det samme, men bidragene til *færdighedstræning* er almindeligvis en smule tungere. Dertil i mindre grad tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*, *teoriforståelse* og i lille grad *konventionskendskab*, mens *problemløsning* stort set ikke optræder. Den beskedne tyngde i *anvendelses*-dimensionen lægges entydigt i *service*-tyngdepunktet, da formuleringerne mere eller mindre direkte refererer til anvendelse på veldefinerede ekstramatematiske områder.

1961/1971-ordningen nedtoner i de abstrakte formuleringer tyngden i *færdighedstræning* yderligere, så den i 1971 nærmest er helt væk. I stedet lægges fokus i *begrebskendskab*, *ræsonneret retfærdiggørelse* og *konventionskendskab*. Fra 1971 synes også *problemløsning* at få tyngde. Udviklingen afspejler sig dog ikke i pensumlisten, hvor balancen ligner den forgående periode. For *anvendelsesdimensionen* ligger den stadig beskedne tyngde fortsat mest i *service*.

Ved 1988/1999-ordningen peger analysen af de abstrakte formuleringer fortsat på *begrebskendskab* med stor tyngde og med en øget tyngde i *problemløsning*. Der synes igen at være tyngde i *færdighedstræning*, men mindre end i de to først nævnte tyngdepunkter. Indholdsbeskrivelsen bakker delvist denne udvikling op, i det begrebskendskab her synes en anelse tungere end *færdighedstræning*. Omvendt optræder *problemløsning* ikke.

I 2005/2010-ordningens læreplan flytter tyngden i de mere abstrakte beskrivelser i høj grad væk fra *teori*-dimensionen og de tilbageværende fragmenter er svære at indplacere. I de mere konkrete beskrivelser af faglige mål og fagligt stof, lægges dog en væsentlig tyngde i *færdighedstræning* og sekundært i *begrebskendskab*. Her ligner det altså i højere grad mønsteret fra tidligere perioder. Analysen af vejledningen peger mod størst tyngde i *begrebskendskab* og dernæst i *færdighedstræning* og *ræsonneret retfærdiggørelse*. I *anvendelses*-dimensionen lægges der størst tyngde i *motivation*- og derudover i mindre grad i *service*-tyngdepunktet.

Inddrages derimod analyserne af eksamensopgaverne, viser der sig i hele perioden en massiv fokusering på *færdighedstræning*. Ser man på antal af identitetsbidrag med stor tyngde i *færdighedstræning* ud af det samlede antal identitetsbidrag er det omkring 1950 fordelt 14 ud af 17, omkring 1970 med 20 ud af 24, omkring 1980 med 37 ud af 45, omkring 2000 med 50 ud af 59 og omkring 2010 med 75 ud af 88. I hele perioden suppleres dette af et vedvarende fokus, om end med langt mindre tyngde, på *problemløsning*. Dertil kommer periodevise trends. Omkring 1970 og 1980 ses en vis tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse* og omkring 1970 tillige *konventionskendskab*. Omkring 2000 og især 2010 ses en trend med tyngde i *teoriforståelse* og i lidt mindre grad i *begrebskendskab*. Til gengæld forsvinder *ræsonneret retfærdiggørelse* og *konventionskendskab* helt.

En overordnet vurdering af tyngdens fordeling i *teori*-dimensionen synes altså at pege på, at den i de styrende dokumenter især koncentreres i *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, med svingende styrke mellem de to. Men at eksamensopgaverne endegyldigt dømmer fordelingen til at være tungest i *færdighedstræning* gennem hele perioden.

Ser man på *anvendelses*-dimensionen, så er der omkring 1950 slet ingen anvendte opgaver i eksamenssættene. Omkring 1970 dukker enkelte op, som har deres tyngde i *illustration*. Omkring 1980, 2000 og 2010 bliver der som nævnt ovenfor stadig flere og tyngden forskubbes sådan, at den er tungest i *motivation*, knapt halvt så tung i *illustration* og derudover med mindre tyngde i *service*.

Tilbage er der nuanceringen af *meta*-dimensionen, der som bekendt kun optræder i de styrende dokumenter. I 1935/1953-ordningen berøres den kun ganske svagt i abstrakte vendinger, mens den i 1961/1971-ordningen får lidt større tyngde og i 1988/1999-ordningen får den yderligere tyngde. Fælles for de tre perioder er, at der stort set kun er tale om tyngde i tyngdepunktet *intern refleksion*, som er ensidigt repræsenteret i form af fagets egen historie. Med 2005/2010-ordningen sker der en klar udvidelse af dimensionens samlede tyngde, ved at alle tre tyngdepunkter fylder noget.

Et forsøg på at optegne system-domænets fagidentiteter i de fire perioder ud fra den gennemførte analyse, kunne se ud som vist i tabel 5.12.

Periode	**Teori**	**Anvendelse**	**Meta**
1935/1953	**a**, e, *c*, *d*	*k*	-
1961/1971	**a**, e, c, f, *b*	*k*	*r*
1988/1999	**a**, e, b, *d*	j, i	*r*
2005/2010	**a**, e, b, d	j, i, *k*	r, *s*, *t*

Tabel 5.12) Sammenfatning af fagidentiteter på system-domænet i de fire reform-perioder.

6 Analyse: Fagidentiteter hos lærebøger

I dette kapitel vil afhandlingens analyse blive ført videre fra systemdomænet til lærebogsdomænet. Analysen vil igen tage afsæt i først en historisk del og dernæst en aktuel del, med anvendelse af begrebsapparatet opstillet i kapitel 3. Metoden vil i hovedsagen være den samme, nemlig opdeling af dokumenter i passende små bidder – *identitetsbidrag* – som hver især vil blive vurderet ud fra de tre dimensioner af en fagidentitet og afslutningsvis sammenfattet til et helhedsindtryk for det enkelte dokument (her et udsnit af lærebøger). Der vil dog være den forskel fra system-analysen, at der her også registreres en vægt af hvert identitetsbidrag som måles i antallet af linjer det spænder over.

Som beskrevet i kapitel 4 er der taget et uddrag fra hvert lærebogssystem, bestående af fire kapitler. Bogens ”første kapitel”, bogens første kapitel om trigonometri, første kapitel om funktioner samt første kapitel om differentialregning. I det omfang at der til lærebogssystemet hører en særskilt opgavesamling, er denne inddraget på passende vis. Det betyder at opgaver der refereres til i selve teksten analyseres som del af denne, mens opgaver stillet til kapitlet, men uden specifik reference, analyseres særskilt.

6.1 Analyse af historiske lærebøger

I forlængelse af analysen i kapitel 5, er der udvalgt lærebøger til denne analyse fra to af de tre historiske perioder. Det drejer sig om perioderne 1935-1961 og 1961-1988. Fra hver af disse perioder er der valgt et lærebogssystem som har været særligt dominerende i perioden. Der er ikke - jf. argumentationen i afsnit 4.3.2 - udvalgt noget lærebogssystem fra perioden 1988-2005.

6.1.1 Andersen og Mogensen (Gyldendal, 1942)

Det første og ældste lærebogssystem der analyseres i denne afhandling, er ”*Lærebog i Matematik for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linie*”, som blev udgivet i fem bind af Aksel Frederik Andersen og Poul Mogensen på forlaget Gyldendal. Efter de to forfattere kaldes systemet almindeligvis blot *Andersen og Mogensen*. Første bind udkom i 1937 i konkurrence med lærebogssystemet *Juul og Rønnau*, Munksgaards forlag, fra 1936 og det 10 år ældre system *Pihl og Kristensen*, ligeledes udgivet på Gyldendal (Jakobsen & Thybo 2008, s.529f).

Første bind udkom i 1937 og omhandlede emner som tal, funktioner, ligninger og trigonometri. Andet bind udkom i 1938 og gik dybere med talmængder og funktioner, samt introducerede differential- og integralregning. Tredje og fjerde bind udkom begge i 1939 og omhandlede hhv. analytisk plangeometri og en blanding af forskelligt, bl.a. vektorer og komplekse tal. Femte og sidste bind udkom først i 1946 og omhandlede stereometrien (rumgeometri).

Analysen af Andersen og Mogensen tager afsæt i en genudgivelse af anden udgave af første bind fra 1942 (se afsnit 4.3.2). Systemet er særligt ved, at det ikke indeholder en selvstændig samling af opgaver, om end der i teksten indgår såkaldte ”eksempler” hvor af nogle er gennemgange og nogle er øvelser.

Første kapitel i første bind

Første kapitel i første bind af Andersen og Mogensen hedder ”I. Det reelle Talsystem” og er inddelt i tre underafsnit: ”A. Hele Tal.”, ”B. Rationale Tal.” og ”C. Reelle Tal.”. Kapitlet bygger således de reelle tal op begrebsmæssigt ved at starte med et intuitivt og forforstået talbegreb. Der startes således med formuleringen: »*I dette Afsnit betragter vi udelukkende hele Tal og foreløbig kun positive hele tal*« (s. 1). Derpå starter den egentlige opbygning af teori og begreber.

Underafsnit A har særlig fokus på *primtalsopløsning* og anvendelsen af dette til at undersøge *multiplikation* og *division med rest*. I underafsnit B udvides dette til rationale tal og brøkfremstillinger. Her gennemgås også en egentlig aksiomatisk præsentation af det rationale talområde, om end det sker under overskriften ”Grundregler for det rationale Talsystem” og uden brug af et mængdebegreb. Fra ”uligheder” og ”numerisk værdi” præsenteres derpå begreberne ”talfølge” og ”intervalindsnævring”, som bruges til at fremstille uendelige decimalbrøker. I underafsnit C bruges dette som afsæt for *irrationale tal* og der nås frem til hovedsætningen »*De Tal, der fremstilles ved samtlige uendelige Decimalbrøker, er netop Samlingen af alle reelle Tal ≥ 0.*«

En analyse af fagidentiteten i kapitlet giver følgende resultat, hvor hvert identitetsbidrag vægtes efter sit linjeantal. Den samlede analyse ses i bilag B.1. Her er også fordelingen af de uvægtede identitetsbidrag opgjort. I den anden tabel nedenfor ses hvordan fordelingen af ”stor tyngde” mellem de seks tyngdepunkter i teori-dimensionen er fordelt for hhv. den vægtede og den uvægtede opgørelse.

Dimension (i alt)	**I** (1594)						**Med** (13)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	197	0	437	193	337	44	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	27	0	63	48	46	142	13	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	37	0	8	0	0	15	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**261**	**0**	**508**	**241**	**383**	**201**	**13**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.1) Vægtet analyse af ”første kapitel” i Andersen og Mogensen.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**
Vægtet	16%	0%	36%	16%	28%	4%
Uvægtet	20%	0%	28%	20%	28%	3%

Tabel 6.2) Fordeling af ”stor tyngde” i ”første kapitel” i Andersen og Mogensen, hhv. vægtet og uvægtet

Der er to meget tydelige pointer for første kapitel. For det første fylder *med*- og *om*-dimensionerne intet. Den mikroskopiske tyngde i *med*-dimensionen handler om nogle illustrative henvisninger til ”tændstikker”. Det er altså ren matematisk teori. For det andet har problemløsning som tyngdepunkt ingen tyngde. Forbeholdet for den sidste konklusion er, at der findes enkelte opgaver undervejs, der handler om selv at bevise sætninger. Dette er her talt som *ræsonneret retfærdiggørelse.*

En ligeledes tydelig konklusion er, at *ræsonneret retfærdiggørelse* og *begrebskendskab* er de tyngdepunkter som har størst tyngde, mens *færdighedstræning* og *teoriforståelse* ligger et stykke efter. Den præcise fordeling er sådan, at ræsonneret retfærdiggørelse fylder mest i den vægtede analyse, mens den og begrebskendskab er lige tunge i den uvægtede. *Færdighedstræning* og *teoriforståelse* er relativt set lige tunge i begge analyser, men tungere i forhold til de andre i den uvægtede. Endeligt er *konventionskendskab* tydeligt til stede, men noget lettere end de øvrige.

Her følger et par eksempler på hvordan analysen er gennemført:

Andersen og Mogensen (1942), side 2-3	**Andersen og Mogensen (1942), side 24**
Ethvert sammensat Tal kan skrives som et Produkt af Primtal. Det sammensatte Tal s divideres med dets mindste Divisor $(\neq 1)$, som jo er et Primtal p_1; vi har nu $s = p_1 s_1$, hvor $s_1 > 1$. Er dernæst p_2 den mindste Divisor $(\neq 1)$ i s_1, faar vi $s_1 = p_2 s_2$, altsaa $s = p_1 p_2 s_2$; hvis $s_2 = 1$, er vi færdige. Er derimod $s_2 > 1$, gaar vi videre med $s_2 = p_3 s_3$ o. s. v.. Dette kan imidlertid ikke fortsættes uden Ophør; thi Kvotienterne $s_1, s_2, s_3, \ldots$ bliver stadig mindre og skal dog være positive og hele. Men Afslutningen kan kun indtræde ved, at vi kommer til en Kvotient, f. Eks. s_5, som er lig 1. Vi har da $s = p_1 p_2 p_3 p_4 p_5$, hvorved vi har faaet en *Primtalopløsning* af s; vi siger ogsaa, at s er *opløst i Primfaktorer*.	Ved en *Talfølge* forstaas en uendelig Samling af Tal nævnt i en bestemt Nummerorden $$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots.$$ De enkelte Tal a_n kaldes Talfølgens Elementer; de behøver ikke at være indbyrdes forskellige. To Talfølger regnes kun for ens, naar Elementerne med samme Nummer er ens. En Talfølge angives enten ved, at man opgiver et Regneudtryk, ved Hjælp af hvilket man kan beregne det n^{te} Element a_n for enhver Værdi af n (f. Eks. $a_n = 6n^2 - n$), eller ved, at man paa anden Maade siger, hvad det n^{te} Element skal være (f. Eks. at a_n skal være det n^{te} Primtal).

Udklippet til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse* og ikke andet. Der er tale om en *matematisk sætning* som retfærdiggøres ved et bevis båret af et *ræsonnement*. Der er ikke tale om en "sætning-bevis"-fremstilling som den ses i senere lærebøger, men snarere om et stykke sammenhængende prosa-tekst, hvor grænsen mellem sætning og bevis alene markeres med typografi. Dette er et udpræget træk ved Andersen og Mogensen, men ikke desto mindre understøttende for en fagidentitet hvor matematik handler om den *ræsonnerede retfærdiggørelse*.

Udklippet til højre er vurderet til at have stor tyngde i *begrebskendskab*, fordi fokus ligger i at introducere endnu et begreb. Det understøtter altså en fagidentitet, hvor matematik fremstår som en stor samling af begreber. Endvidere er udklippet vurderet til mellemtyngde i *konventionskendskab*, fordi der opbygges en til lejligheden særlig notationsbrug.

Et par eksempler mere:

Andersen og Mogensen (1942), side 33	**Andersen og Mogensen (1942), side 12-13**
Efter at vi har fundet en positiv Rod, kan vi straks løse denne Ligning fuldstændigt, d. v. s. angive alle de Tal, der tilfredsstiller den. Af Omskrivningen $$x^2 - 2 = x^2 - (\sqrt{2})^2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$ ser vi nemlig umiddelbart, at Ligningen foruden af $x = \sqrt{2}$ kun tilfredsstilles af $x = -\sqrt{2}$. Den fuldstændige Løsning er derfor $x = \pm\sqrt{2}$.	I Stedet for at se paa Nævnerens Primtalopløsning kan man anvende Division. At Brøken $\frac{a}{b}$ kan skrives som en Decimalbrøk med n Decimaler, er nemlig ensbetydende med, at $\frac{a}{b} \cdot 10^n$ er et helt Tal, altsaa at b gaar op i $a \cdot 10^n$. Man prøver derfor efterhaanden, om b gaar op i a, $a \cdot 10$, $a \cdot 100$ o. s. v.. Hvis Divisionen engang gaar op, kan $\frac{a}{b}$ skrives som Decimalbrøk, ellers ikke.

Udklippet til venstre er her vurderet til at have stor tyngde i *færdighedstræning*. Der er således tale om at udføre grundlæggende regninger i en konkret situation. De fleste af sådanne bidrag er eksempler eller opgaver hvor konkrete beregninger skal foretages. Men her er et eksempel på at der også i den egentlige prosatekst fremstår passager, hvor matematik optræder som en samling af bestemte *færdigheder* til brug i *konkrete situationer*.

Udklippet til højre er vurderet til at have stor tyngde i *teoriforståelse*. Der er på den ene side ikke tale om en retfærdiggørelse i form af et egentligt bevis, omvendt tales der heller ikke om en konkret færdighed i en velafgrænset situation. Her fremstår matematik derimod som omgang med abstrakte regler, der har anvendelse i mange situationer.

Kapitel om "Trigonometri"

Som omtalt i afsnit 4.3, så er udgangspunktet egentlig at der udvælges "første kapitel" om emnet trigonometri. Andersen og Mogensen har tre kapitler om emnet: "VIII. Trigonometriens elementer", "IX. Trigonometriske beregninger" og "X. Trigonometriske ligninger". Det første af disse består af to underafsnit: "A. Maaling af Cirkelbuer og Vinkler." og "B. De Trigonometriske Funktioner".

Af hensyn til den historiske sammenlignelighed er der her imidlertid valgt det midterste af kapitlerne til analysen, fordi det handler om at undersøge trekanter. Dette består af tre underafsnit: "A. Beregning af Sider og Vinkler i en trekant", hvor dels de grundlæggende sætninger præsenteres, dels gennemgås "de fem trekanttilfælde". Derpå "B. Beregning af særlige stykker i en Trekant." hvor bl.a. median og vinkelhalveringslinje gennemgås. Og endeligt "C. Polygoners Areal", hvor trekanter og andre polygoners areal undersøges på forskellig vis.

Den vægtede analyse af kapitlet samt fordelingen af "stor tyngde" fremgår af følgende, i det den fulde analyse kan ses i bilag B.1:

Dimension (i alt)	**I** (695)						**Med** (0)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	95	1	230	241	51	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	18	0	27	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	113	1	257	273	51	0	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.3) Vægtet analyse af kapitel om "Trigonometri" i Andersen og Mogensen.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	15%	0%	37%	39%	8%	0%	0%	0%
Uvægtet	19%	2%	34%	42%	3%	0%	0%	0%

Tabel 6.4) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om "trigonometri" i Andersen og Mogensen, hhv. vægtet og uvægtet

Igen fremstår det overordnede billede med al tyngde i *teori*-dimensionen og med et stort fokus på *ræsonneret retfærdiggørelse*. Der er dog her et tilsvarende fokus på teoriforståelse. Til gengæld betyder begrebskendskab markant mindre i dette kapitel og konventionskendskab slet ingenting. Problemløsning har fortsat heller ingen nævneværdig rolle. Endelig har færdighedstræning omtrent samme tyngde som i "første kapitel".

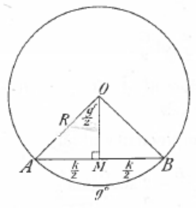
Samlet set kan siges om kapitlet, at det med afsæt i sætning-bevis-konstruktioner og teoretiske undersøgelser fremstiller en velafgrænset del af matematikken – trekanter – som noget der lader sig koge ned i en velafgrænset mængde af standardproblemer. Færdighedstræning kunne således sagtens have fyldt meget, om bogen havde været spækket med eksempler på og opgaver i anvendelse af sætninger og teori, men det er den ikke. Derfor fremstår matematik i kapitlet netop som en blanding af *ræsonneret retfærdiggørelse* og *teoriforståelse*.

Her tre eksempler:

<table>
<tr>
<th>Andersen og Mogensen (1942), side 170</th>
<th>Andersen og Mogensen (1942), s.176</th>
</tr>
<tr>
<td>

A. Beregning af Sider og Vinkler i en Trekant.

136. Formel til Kordeberegning. I en Cirkel med Radius R er tegnet en Korde $AB = k$, som afskærer en Bue, hvis Gradtal g er < 180. Trækker man i den ligebenede Trekant OAB Højden OM, faar man



$$k = 2R \sin \frac{g}{2},$$

og man ser umiddelbart, at denne Formel ogsaa gælder for $g = 180$.

Af Hensyn til en Anvendelse i næste Paragraf bemærkes, at Formlen ogsaa kan skrives

$$k = 2R \sin \frac{360 - g}{2},$$

og vi har saaledes Sætningen:

En Korde er lig med Diameteren multipliceret med sinus af det halve Gradtal for enhver af de to Buer, Korden afskærer.

</td>
<td>

139. Andet Trekantstilfælde. Givet *en Vinkel og de hosliggende Sider*, f. Eks. A, b og c. Beregn a, B og C. Trekanten kan altid konstrueres, og man faar 1 Løsning.

Til Bestemmelse af de ubekendte Stykker benytter vi *den udvidede pytagoræiske Læresætning og to Tangensrelationer*, nemlig

kan altid findes; i værste fald går cos A → 1

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad \cancel{og}\ a^2 \to (b-c)^2$$

og

$$\cot B = \frac{c - b\cos A}{b \sin A}, \quad \cot C = \frac{b - c\cos A}{c \sin A},$$

hvor vi af Hensyn til, at en af de ubekendte Vinkler kan være 90°, har skrevet Tangensrelationerne paa reciprok Form. Dette Ligningssystem har kun een Løsning (a, B, C), hvor Vinklerne B og C ligger mellem 0° og 180°. Denne Løsning angiver derfor de søgte Stykker.

Eks. 7. I $\triangle ABC$ er $b = 5$, $c = 7$, $\cos A = \frac{3}{5}$. Find de øvrige Stykker.

Under Anvendelse af de nævnte Formler finder man

$$a^2 = 32; \quad a = 4\sqrt{2} = 5{,}657\,.$$

$$\mathrm{tg}\, B = \frac{5 \cdot \frac{4}{5}}{7 - 5 \cdot \frac{3}{5}} = 1; \qquad \mathrm{tg}\, C = \frac{7 \cdot \frac{4}{5}}{5 - 7 \cdot \frac{3}{5}} = 7;$$

$$B = 45°. \qquad C = 81°{,}87\,.$$

</td>
</tr>
</table>

Udklippet til venstre er vurderet til stor tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*. Det er dog i endnu mindre grad end eksemplet fra "første kapitel" udtryk for en klassisk "sætning-bevis"-fremstilling. I stedet er der tale om en følge af ræsonnementer der munder ud i en konklusion, som dermed har implicit karakter af en bevist sætning. Dette valg om at resultater følger af en argumentationskæde er formentlig udtryk for en særlig pædagogisk tilgang til formidlingen af faget.

Udklippet til venstre er to identitetsbidrag (punkt 139 det ene, eksempel 7 det andet) som viser hvordan *teoriforståelse* og *færdighedstræning* kommer på banen i kapitlet. En generel teoretisk undersøgelse af en veldefineret generel situation og derpå anvendelse af denne teori som praktisk færdighed ved løsning af en specifik opgave indenfor den generelle situation.

Kapitel om "Funktioner"

Det første kapitel der behandler emnet "Funktioner" er kapitel 5 i lærebogssystemets første bind. Forud er gået kapitel 4 om "Indledning til den analytiske geometri", hvor koordinatsystemer, rette linjer, mv. er gennemgået. Det er således det egentlige funktions-begreb der tages fat på i kapitel 5.

Kapitlet er delt i tre underafsnit. Det første hedder "A. Almindelige Bemærkninger" og rummer en række referencer ud af matematikken, hvor funktioner eksemplificeres. Dertil gives en generel definition og så præsenteres de mest enkle funktionssammenhænge, proportionalitet og omvendt proportionalitet. Den anvendelsesorienterede begrebsintroduktion adskiller sig fra stilen i hele resten af lærebogssystemet.

Andet underafsnit hedder "B. Førstegradspolynomiet" hvor lineære funktioner præsenteres, bl.a. med det særlige formål at introducere *lineær interpolation* som approksimativ metode. Tredje underafsnit hedder "C. Andengradspolynomiet" og introducerer kvadratiske funktioner, samt teoretiske resultater i den forbindelse, herunder løsning af andengradsuligheder.

Den vægtede analyse af kapitlet samt fordelingen af "stor tyngde" fremgår af følgende, i det den fulde analyse kan ses i bilag B.1:

Dimension (i alt)	**I** (832)						**Med** (93)				**Om** (6)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	276	14	100	186	113	0	0	0	19	0	0	6	0
Mellem tyngde	54	0	34	19	5	21	0	2	57	0	0	0	0
Lille tyngde	0	10	0	0	0	0	0	0	15	0	0	0	0
Sum	**330**	**24**	**134**	**205**	**118**	**21**	**0**	**2**	**91**	**0**	**0**	**6**	**0**

Tabel 6.5) Vægtet analyse af kapitel om "funktioner" i Andersen og Mogensen.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	39%	2%	14%	26%	16%	0%	3%	1%
Uvægtet	48%	2%	6%	18%	21%	0%	3%	2%

Tabel 6.6) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om "funktioner" i Andersen og Mogensen, hhv. vægtet og uvægtet

Der kan bemærkes to ting for dette kapitel, sammenlignet med de to foregående. For det første er der nu tyngde i *med*- og *om*-dimensionen. Ikke bare sekundært, men også i enkelte identitetsbidrag som hovedpointe. Der er dog i det væsentlige stadig tale om et meget lille samlet indtryk. For det andet sker der en klar forskydning mod *færdighedstræning*. Afsnittet har klart mere fokus på at fremstille matematik som det at aktivere velafgrænsede færdigheder, end de to forrige kapitler har haft det. Den øvrige tyngde findes især hos *teoriforståelse* og i lidt mindre grad i *ræsonneret retfærdiggørelse og begrebskendskab*.

Her skal særligt fremhæves to eksempler på identitetsbidrag til *med*- og *om*-dimensionen:

Andersen og Mogensen (1942), s. 86	**Andersen og Mogensen (1942), s. 83**
Det bemærkes til Slut, at ved de Eksempler paa omvendt proportionale Størrelser, som man i Praksis støder paa, er det i Reglen kun Hyperbelgrenen i 1. Kvadrant, man faar Brug for, ofte endda kun spredtliggende Punkter af den (Antallet af Arbejdere og den Tid, Arbejdet varer).	Om mange af de Funktioner, man støder paa i Fysikken og andre Naturvidenskaber, gælder, at man ikke kender et Regneudtryk, hvorved den afhængige Variabels Værdier kan findes; man maa da anvende *Maaleforsøg*; et Eksempel herpaa er Vands Kogepunkt som Funktion af Barometerstanden. I Statistikken har man i Almindelighed ingen anden Vej at gaa end at benytte *Optælling*.

I eksemplet til venstre er der alene lagt tyngde i *med*-dimensionens tyngdepunkt *service*. Der er tale om en kort tekst der i det væsentlige fremstiller hvordan matematikken finder anvendelse i andre fagområder. I eksemplet til højre er der alene lagt tyngde i *om*-dimensionens tyngdepunkt *videnskabsteori*, fordi der er tale om en metarefleksion over matematikkens særlige rolle, muligheder og begrænsninger i andre videnskaber. Begge bidrag er meget unikke for lærebogssystemet, der ellers stort set fremstiller matematikfaget som en ren teori-størrelse.

Kapitel om "differentialregning"

Det første kapitel der handler om differentialregning er kapitel III i lærebogssystemets andet bind. Optakten til kapitlet er kapitel I om "Mængder og talfølger" samt kapitel II om "Funktioner" med fokus på begreberne *grænseværdi* og *kontinuitet*.

Selve kapitel III er delt i fire dele. "A. Differentialkvotient" som gennemgår begreberne *tangent*, *differentiation* og *differential*. "B. Differentiationsregler" som gennemgår regneregler for differentiation, herunder af sammensatte, omvendte og implicitte funktioner. "C. Sætninger om differentiable funktioner" med fokus på en række sætninger, bl.a. *middelværdisætningen*. Og endeligt "D. Undersøgelse af differentiable funktioner", hvor fokus ligger på løsning af en række typiske opgaver, bl.a. bestemmelse af *monotoniintervaller* og *største- og mindsteværdier*.

Den vægtede analyse af kapitlet samt fordelingen af "stor tyngde" fremgår af følgende, i det den fulde analyse kan ses i bilag B.1:

Dimension (i alt)	**I** (1659)						**Med** (0)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	339	0	454	468	193	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	6	41	0	27	67	18	0	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	46	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**345**	**41**	**454**	**495**	**260**	**64**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.7) Vægtet analyse af kapitel om "differentialregning" i Andersen og Mogensen.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	23%	0%	31%	32%	13%	0%	0%	0%
Uvægtet	23%	0%	24%	36%	16%	0%	0%	0%

Tabel 6.8) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om "differentialregning" i Andersen og Mogensen.

Kapitlet har al sin tyngde placeret i *teori*-dimensionen. Der er altså heller ikke her et eneste eksempel på et anvendelses- eller metaaspekt af faget. Tyngden ligger primært i *ræsonneret retfærdiggørelse* og *teoriforståelse*, med sekundært fokus færdighedstræningen. Det er særligt det sidste afsnit i kapitlet der placerer vægt i det tyngdepunkt, hvor der bruges en del plads på at gennemregne konkrete eksempler på undersøgelser af funktioner. Kapitlet synes således samlet set at have sit primære fokus på opbygning og retfærdiggørelse af et teoretisk apparat, der begrunder de konkrete færdigheder der trænes.

Samlet vurdering

I tabel 6.9 er resultaterne af de fire vægtede kapitelanalyser lagt sammen og i tabel 6.10 er fordelingen af ”stor tyngde” mellem de forskellige tyngdepunkter indenfor hvert af de fire kapitler samt for de fire kapitler som helhed, vist. Begge tabeller giver det tydelige indtryk, at tyngdepunktet *ræsonneret retfærdiggørelse* er tungest, fulgt af *teoriforståelse* og derpå færdighedstræning. Samtidig viser tabellerne hvor lidt *anvendelses-* og *meta-*dimensionerne fylder. I praksis ingenting.

I den forstand er bogens overordnede fagidentitet præget af, at matematik for det første er en rent teoretiske størrelse. Altså et fag hvor en teoribygning i sig selv er genstandsfelt. For det andet at det er retfærdiggørelsen af teoribygningen der er primært fokus, tæt fulgt af det at omgås og forstå teorien, mens det at omsætte teorien i mere praktiske færdighedsmæssige øvelser har en mindre fremtrædende rolle. Det bemærkes endvidere at problemløsning og konventionskendskab som tyngdepunkter er stort set fraværende, mens begrebskendskab er synligt, men væsentligt mindre tungt end de tre tydeligste. Det er dog også vigtigt at bemærke, at denne fagidentitet i et vist omfang mudres lidt til at variationerne mellem de fire analyserede kapitler. Således fremstår særligt kapitlet om *funktioner* med en noget anden identitet, end bogen umiddelbart gør som helhed.

Dimension (i alt)	**I** (4780)						**Med** (106)				**Om** (6)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	907	15	1221	1088	694	907	0	0	19	0	0	6	0
Mellem tyngde	105	41	124	126	118	105	13	2	57	0	0	0	0
Lille tyngde	37	10	8	0	0	37	0	0	15	0	0	0	0
Sum	**1049**	**66**	**1353**	**1214**	**812**	**286**	**0**	**2**	**91**	**0**	**0**	**6**	**0**

Tabel 6.9) Vægtet analyse af alle fire udvalgte kapitler i Andersen og Mogensen.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Første kapitel	16%	0%	***36%***	16%	28%	4%	0%	0%
Trigonometri	15%	0%	***37%***	***39%***	8%	0%	0%	0%
Funktioner	***39%***	2%	14%	26%	16%	0%	3%	1%
Differentialregning	23%	0%	***31%***	***32%***	13%	0%	0%	0%
Samlet	**23%**	**0%**	**31%**	**27%**	**17%**	**1%**	**0%**	**0%**

Tabel 6.10) Fordeling af ”stor tyngde” i vægtet analyse af de fire udvalgte kapitler i Andersen og Mogensen.

6.1.2 Kristensen og Rindung (Gads Forlag, 1962)

Det andet historiske lærebogssystem der analyseres i denne afhandling, er Erik Kristensen og Ole Rindungs ”matematik” 1, 2 og 3. Systemet var særligt derved, at Ole Rindung samtidig fungerede som fagkonsulent i perioden 1958-1965. Systemet blev således stærkt dominerende og fik i praksis nærmest karakter af en art ”de facto bekendtgørelse”. De i tiden konkurrerende systemer talte en tilpasset udgave af *Andersen og Mogensen* samt Gyldendals system ”Matematik for gymnasiet” af

Andersen, Bülow og Helms. I den mere perifere ende udkom på Munksgaard ”Elementær matematik” af *Fenchel, Handest, Meyer og Neerup*, der aldrig opnåede egentlig udbredelse, fordi det formentlig var både for pædagogisk og for fagligt svært (Munkholm 2008, s. 606-611). En analyse af Kristensen og Rindung er altså ganske dækkende for perioden 1965-1988, selvom systemet især fra slutningen af 70’erne mistede noget af sin tidligere dominans.

Kristensen og Rindung udkom med bind 1 i 1962 fælles for hele matematisk linje. Det dækker emner som mængder, talmængder, vektorer, afbildninger, reelle funktioner, ækvivalensrelationer, algebra og trigonometri. Bind 2 udkom i 1963 i en variant særlig for den matematisk-fysiske gren. Det dækker emner som f.eks. kvantorer, reelle tal, kontinuitet, grænseværdi, differential- og integralregning og afbildninger af planen ind i planen. I 1964 udkom bind 2 i en variant til den naturfaglige (og samfundsfaglige) gren. Samme år udkom bind 3 til den matematisk-fysiske gren, som bl.a. dækker emner som kombinatorik, algebra, komplekse tal og geometri. I 1965 udkom tillige et mindre bind til de natur- og samfundsfaglige grene om sandsynlighedsregning.

Systemet udkom i mange forskellige udgaver i de følgende år, men analysen her vil tage afsæt i de første udgaver af bind 1 og 2 til matematisk-fysisk gren. Dertil udkom til hvert bind en opgavesamling, som i struktur ligner selve lærebogen[4]. Herfra indgår opgaver som en del af relevant kapitel.

Første kapitel i første bind

Det første kapitel i bogens første bind hedder ”Mængder og udsagn” og gennemgår en række centrale elementer fra og sammenhænge mellem mængdelæren og udsagnslogikken. Afsnittet indledes således med delafsnittene ”Mængder” og ”Åbne udsagn”. Derpå følger delafsnit om konkrete dele af mængdelære og udsagnslogik: ”Den tomme mængde”, ”Delmængder”, ”Implikationer”, ”Fællesmængde”, ”Foreningsmængde”, ”Mængdedifferens, komplementærmængde” og ”Produktmængde”. Afslutningsvis bringes et kort delafsnit om ”Relationer”. For at understøtte kapitlet findes der i kapitel 1 i den tilhørende opgavebog i alt 55 opgaver, som i denne analyse opfattes som en fuldt ud integreret del af kapitlet. Analysen af kapitlets fagidentitet viser (fuld analyse i bilag B.2):

Dimension (i alt)	**I** (1500)						**Med** (35)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	12	5	112	47	400	446	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	57	13	49	46	100	162	11	24	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	39	0	12	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**69**	**18**	**161**	**132**	**500**	**620**	**11**	**24**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.11) Vægtet analyse af ”første kapitel” i Kristensen og Rindung.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	1%	0%	11%	5%	39%	44%	0%	0%
Uvægtet	1%	1%	12%	9%	31%	46%	0%	0%

Tabel 6.12) Fordeling af ”stor tyngde” i ”første kapitel” i Kristensen og Rindung, hhv. vægtet og uvægtet

[4] Den analyserede opgavesamling til bind 2 er 2. udgave, som rummer enkelte ikke forstyrrende ændringer.

Som det fremgår er der en nærmest entydig fokusering på *konventions*- og *begrebskendskab*. Kapitlet forudsætter mange færdigheder, f.eks. løsning af ligninger og uligheder, men plottet i kapitlet er at placere disse færdigheder ind i en bestemt begrebsverden med bestemte konventioner om notation, nemlig en mængdebaseret. Her to eksempler:

Kristensen og Rindung (1962), side 9	**Kristensen og Rindung (1962), side 7**
11.5 eksempel. Lad P og Q være to givne punkter i planen, og lad $a(x)$ og $b(x)$ være de to åbne udsagn: $a(x)$: »x er et punkt, der ligger lige langt fra P og Q«. $b(x)$: »x er et punkt på PQ's midtnormal«. Da er sætningen »$a(x) \Leftrightarrow b(x)$« en velkendt sætning fra den elementære geometri (jfr. eksempel (9.2)).	Idet A betegner en vilkårlig mængde, kan følgende udtalelse anses for sand: »Ethvert x der tilhører $\emptyset$, tilhører også A«. Af denne grund vedtager vi, at for en vilkårlig mængde A er (8.3) $\emptyset \subseteq A$.

Eksemplet til venstre er et typisk eksempel på hvordan *konventionskendskab* får tyngde. Det umiddelbare matematiske indhold handler om punkter og midtnormaler, men den virkelige pointe er ikke den matematiske substans, men derimod at etablere en bestemt konvention om hvordan den substans skrives med korrekt notation. Et lignende eksempel er sætningen: »At løse en ligning betyder at bestemme sandhedsmængden for det åbne udsagn, som ligningen er« (*ibid*, s.10). Eksemplet til højre er sjældnere. Her handler det om et matematisk indhold der gøres ”sand per vedtagelse”.

Her følger yderligere to eksempler fra opgavebogen:

Kristensen og Rindung (1962a), side 7	**Kristensen og Rindung (1962a), side 10**
6. Beskriv følgende mængder: $A = \{x \mid \frac{2}{3}\cdot x \text{ er et helt tal}\}$ $B = \{x \mid \frac{2}{3}\cdot x \text{ er et rationalt tal}\}$ $C = \{x \mid \frac{2}{3}\cdot x \text{ er et lige helt tal}\}$.	**23.** Der er givet mængderne $A = \{a,b\}$ og $B = \{a,b,c,d\}$. Angiv samtlige mængder M, hvor $A \subset M \subseteq B$, og de delmængder af B, der ikke har A som delmængde.

Eksemplet til venstre viser en opgave hvis hovedindhold er at etablere konventioner om notation, mens eksemplet til højre viser, at også opgaver kan bidrage med stor tyngde til *begrebskendskab*. Samlet set fordeler kapitlet altså stort set hele sin tyngde mellem disse to tyngdepunkter. Det viser samtidig at kapitlet overordnet set har hele tyngden i *teori*-dimensionen.

Kapitel om trigonometri

Kapitlet ”Geometriske anvendelser af trigonometriske funktioner” er kapitel 14 i systemets første bind. Kapitel 13 omhandler ”Trigonometriske funktioner” og starter med at introducere bue- og vinkelmål. Derpå introduceres sinus og cosinus samt tangens og cotangens som funktioner defineret på enhedscirklen. Kapitlet afsluttes med en gennemgang af trigonometriske relationer og ligninger, samt en mere praktisk introduktion til trigonometriske skalaer på en regnestok.

Det er altså først i kapitel 14 at trigonometrien handler om trekanter. Kapitlet tager afsæt i linjers hældningskoefficient og vinkler mellem vektorer, ud fra hvilke sinus- og cosinusrelationen udledes. Først derpå studeres retvinklede trekanter og kapitlet afsluttes med en lang introduktion til ”de fem trekantstilfælde”.

I tillæg til kapitlet findes i opgavebogen 82 tilhørende opgaver, som her opfattes som en integreret del af kapitlet. En analyse af kapitlets fagidentitet viser følgende (se bilag b.2 for fuldt resultat):

Dimension (i alt)	**I** (713)						**Med** (33)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	307	31	22	234	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	4	3	74	25	7	6	3	0	11	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	19	0	0	0	0	0	0
Sum	**311**	**34**	**96**	**259**	**7**	**6**	**22**	**0**	**11**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.13) Vægtet analyse af kapitel om "trigonometri" i Kristensen og Rindung.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	52%	5%	4%	39%	0%	0%	0%	0%
Uvægtet	55%	8%	5%	31%	0%	0%	0%	0%

Tabel 6.14) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om trigonometri i Kristensen og Rindung, hhv. vægtet og uvægtet

Som det ses af opgørelsen tegner kapitlet sig med næsten al tyngde placeret i primært færdighedstræning, sekundært i teoriforståelse, mens begrebs- og konventionskendskab er nærmest fraværende – modsat første kapitel. De to kapitler synes altså at have meget forskellige fagidentiteter. Trigonometrikapitlet har dog det til fælles med det første, at stort set alt tyngde ligger i *teori*-dimensionen.

Kapitel om funktioner

Analysen her er foretaget på kapitel 5 i første bind af bogsystemet som hedder "Afbildninger". Kapitlet før hedder "Den rette linjes analytiske fremstillinger" mens kapitlet efter hedder "Reelle funktioner". Da det dog er den principielle fremstilling af funktionsbegrebet der har interessen, er det netop kapitel 5 der er valgt.

Kapitlet starter med afsnittet "Det almindelige afbildningsbegreb" som trækker på eksempler på både reelle funktioner og på geometriske afbildninger samt blandinger. Derpå følger et afsnit om "Afbildninger bestemt ved relationer" som bl.a. har til formål at definere begrebet "graf". Kapitlet undersøger derpå forskellige afledte begreber som billedmængde, bijektion, sammensætning, flytning og ret affinitet. I tillæg findes i opgavebogen kapitel 6 "Afbildninger 1", som føjer 151 opgaver til kapitlet. Den samlede analyse af kapitlet giver følgende resultat (fuldt resultat i bilag B.2):

Dimension (i alt)	**I** (1107)						**Med** (0)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	92	17	86	248	303	156	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	6	0	21	57	49	72	0	0	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**98**	**17**	**107**	**305**	**352**	**228**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.15) Vægtet analyse af kapitel om "funktioner" i Kristensen og Rindung.

	a	b	c	d	e	f	M	O
Vægtet	10%	2%	10%	27%	34%	17%	0%	0%
Uvægtet	10%	2%	6%	31%	35%	14%	0%	0%

Tabel 6.16) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om funktioner i Kristensen og Rindung, hhv. vægtet og uvægtet

Kapitlet ses at have størst tyngde i *begrebskendskab*, næststørst i teoriforståelse og tredjestørst i konventionskendskab. Dertil også tyngde i *færdighedstræning* og *ræsonneret retfærdiggørelse*. Det bemærkes at dette kapitel ikke har nogen form for tyngde i andre dimensioner end *teori*.

Kapitel om differentialregning

Differentialregningen er dækket ind i systemets andet bind i et enkelt kapitel 5. Det forudgående kapitel 4 har dækket støttebegreberne *kontinuitet* og *grænseværdi*. Kapitlet er ganske omfattende og når omkring *differentiabilitet*, *differential*, *differentialkvotient* og regning med sådanne, *afledt funktion* (også af højere orden), *monotoniforhold*, *værdimængde*, *hastighed* og *acceleration* samt også eksempler på *differentialligninger*. Dertil kommer i opgavebog 2 i alt 152 tilhørende opgaver. Analysen af kapitlet giver følgende resultat (fuld analyse i bilag B.2):

Dimension (i alt)	**I** (3078)						**Med** (280)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	695	80	319	1120	521	20	0	0	60	0	0	0	0
Mellem tyngde	25	37	111	79	31	40	27	54	63	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	0	76	0	0	0	0
Sum	**720**	**117**	**430**	**1199**	**552**	**60**	**27**	**54**	**199**	**0**	**0**	**0**	**0**

Tabel 6.17) Vægtet analyse af kapitel om "differentialregning" i Kristensen og Rindung.

	a	b	c	d	e	f	M	O
Vægtet	25%	3%	11%	40%	19%	1%	2%	0%
Uvægtet	37%	4%	6%	38%	13%	0%	1%	0%

Tabel 6.18) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om differentialregning i Kristensen og Rindung, hhv. vægtet og uvægtet

Som det ses er den største tyngde her i *teoriforståelse*, den næststørste i færdighedstræning og også en vis tyngde i begrebsforståelse. Hvad man derudover bør bemærke er, at der i dette kapitel faktisk findes en vis tyngde i *anvendelses*-dimensionen. Og hvad der måske er mere særligt, så findes der enkelte identitetsbidrag med *stor* tyngde i denne dimensions *service*-tyngdepunkt. Dette er formentlig et udslag af lærebogssystemets tilknytning til den matematisk-fysiske gren, hvor matematik og fysik begge læses samtidigt på de høje niveauer. Der er altså enkelte glimt af en fagidentitet hvor matematik især fremstår anvendt.

I de følgende to eksempler kan ses hvordan der skelnes mellem forskellige tyngdebidrag i *anvendelses*-dimensionen:

<table>
<tr><th>Kristensen og Rindung (1963), side 145</th><th>Kristensen og Rindung (1965), side 45</th></tr>
<tr><td>

45.9 øvelse. Vis, at hvis bevægelsen i eksempel (45.6) foregår under påvirkning af gnidningsmodstand, der er proportional med hastigheden, opfylder x_t en differentialligning af formen

(45.10) $$mx_t'' = -\nu x_t - \mu x_t',$$

hvor μ er en positiv konstant.

En differentialligning af denne art mødte vi i forbindelse med omtalen af dæmpet svingning (eksempel (40.1)).

Vis, at når vi bestemmer a og ω, så

$$a = \frac{\mu}{2m} \quad \text{og} \quad a^2 + \omega^2 = \frac{\nu}{m},$$

da angiver (40.1′) en løsning til (45.10) for vilkårlige r og φ.

</td><td>

267. En partikkel bevæger sig på en abscisseakse efter parameterfremstillingen

$$x_t = a(1 - \exp(-\alpha t)).$$

Vis, at den absolutte værdi af partiklens acceleration er proportional med dens fart. Vis endvidere, at

$$x_t \to a \quad \text{for} \quad t \to \infty,$$

hvis a og α er positive.

</td></tr>
</table>

Eksemplet til venstre har stor tyngde i *service*. Det har det fordi der er tale om et velafgrænset og velkendt fysik-fagligt problem, som matematik bliver bedt om at "servicere". Indholdet i øvelsen er altså bestemt af hvad matematikfaget kan bidrage med, mens rammen er bestemt af at fysikfaget finder et bestemt problem interessant. I eksemplet til højre er der mellem-tyngde i *illustration* og stor tyngde i *teoriforståelse*. Der er åbenlyst reference ud af matematikken, men denne reference synes ikke at spille nogen rolle – heller ikke som motivering af forskriften, der ikke umiddelbart har nogen specielt fysisk interesse. Det er altså matematikfaget der bestemmer både ramme og indhold af opgaven, trods anvendelsesaspektet. Der er altså tale om en teoretisk undersøgelse af en funktion.

Samlet vurdering

I tabel 6.19 ses summen af de fire vægtede kapitelanalyser, mens der i tabel 6.20 ses en sammenstilling af de vægtede fordelinger af "stor tyngde" mellem tyngdepunkterne for de enkelte kapitler og for de fire kapitler som helhed. Begge tabeller giver det indtryk, at lærebogssystemet har sin største tyngde i *teoriforståelse* og dernæst i *begrebskendskab* og *færdighedstræning*.

De mest mærkbare forskelle til Andersen og Mogensen synes at være væsentligt mindre tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse* og væsentligt større tyngde i *konventionskendskab*. Dertil at der optræder en lille tyngde i *problemløsning*, som var stort set fraværende i Andersen og Mogensen. Kristensen og Rindung har altså et mindre fokus på sætning-bevis konstruktioner, mens begreber og især hele notationen hentet i mængdelæren spiller en stor rolle. Hvor Andersen og Mogensen især fremstillede matematik som en teoribygning der skulle "retfærdiggøres", fremstiller Kristensen og Rindung den altså i højere grad som et bestemt "sprog" i hvilket der kan tales om "teoretiske ting".

Kristensen og Rindung har – som Andersen og Mogensen – så godt som ingen tyngde i *anvendelses*-dimensionen og slet ingen i *meta*-dimensionen.

Dimension (i alt)	**I** (6398)						**Med** (348)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	1106	133	539	1649	1224	622	0	0	60	0	0	0	0
Mellem tyngde	92	53	255	207	187	280	41	78	74	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	39	0	12	19	0	76	0	0	0	0
Sum	1198	186	794	1895	1411	914	60	78	210	0	0	0	0

Tabel 6.19) Vægtet analyse af alle fire udvalgte kapitler i Kristensen og Rindung.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Første kapitel	1%	0%	11%	5%	***39%***	***44%***	0%	0%
Trigonometri	***52%***	5%	4%	***39%***	0%	0%	0%	0%
Funktioner	10%	2%	10%	27%	***34%***	17%	0%	0%
Differentialregning	25%	3%	11%	***40%***	19%	1%	2%	0%
Samlet	**21%**	**2%**	**10%**	***31%***	**23%**	**12%**	**0%**	**0%**

Tabel 6.20) Fordeling af "stor tyngde" i vægtet analyse af de fire udvalgte kapitler i Kristensen og Rindung.

6.2 Analyse af nutidige lærebøger

Som objekter i denne analyse er valgt de to mest kendte og udbredte lærebogssystemer beregnet til undervisning på A-niveau efter reformen af 2005. Det drejer sig om Carstensen, Frandsen og Studsgaards "MAT" A1, A2 og A3, udgivet på Systime. Og Clausen, Schomacker og Tolnøs "Gyldendals Gymnasiemateamtik" B1, B2 og A, udgivet på Gyldendal. I det følgende vil systemerne blive refereret til ved forlag frem for ved forfatternavne.

6.2.1 Systime: Carstensen, Frandsen og Studsgaard

Systimes lærebogssystem "MAT" i tre bind (A1, A2 og A3) er blevet til i forlængelse af det lærebogssystem som Jens Carstensen og Jesper Frandsen udsendte første gang i starten af 1980'erne og som siden er udkommet i reviderede versioner adskillige gange, i takt med at gymnasieskolen har forandret sig. Systemet er altså oprindeligt udgivet som et alternativ til Kristensen og Rindung i konkurrence med andre systemer der udfordrede dette fra slut-70'erne og frem til reformen i 1988.

Systemet er udgivet under skiftende navn, men omtales generelt efter forfatterne som "Carstensen og Frandsen". I den aktuelle udgave er dog også Jens Studsgaard med som forfatter. Systemets tre bind er udsendt i 1. udgave i hhv. 2005, 2006 og 2007. Siden er flere bind udkommet i nye udgaver. Til hvert bind hører en særskilt opgavebog: "MAT AB1 opgaver", "MAT AB2 opgaver" og "MAT A3 opgaver".

Første kapitel i første bind

Det første kapitel i Systimes hedder "Tal- og bogstavregning". Efter en kort indledning af historisk art følger fire afsnit: "De elementære regningsarter" som behandler regnearterne og deres hierarki samt fortegn og parenteser, "Brøker", "Reduktion af bogstavudtryk" og "Kvadratsætningerne". Mellem afsnittene findes to tema-bokse om "Primtal" og "Forskellige typer af tal". Kapitlet afsluttes med ni såkaldte "eksperimenter". Endelig suppleres kapitlet af 90 opgaver i opgavebogen, som her opfattes som en integreret del af kapitlet.

Før der sammenlignes på fagidentitet, kan det være værd at bemærke at systemet starter på et væsentligt mindre "teknisk niveau" end de to historiske systemer, der begge antager at tal- og bogstavregning er kendt og i stedet starter lige på med en langt mere teoretisk tilgang. Det er derfor vigtigt at minde om, at fagidentiteten *ikke* afhænger direkte af det faglige niveau. Indirekte kan den naturligvis godt gøre det. Analysen af fagidentitet gav følgende resultat (se bilag B.3 for fuld analyse):

Dimension (i alt)	**I** (1342)						**Med** (30)				**Om** (88)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	357	98	42	165	257	169	0	0	0	0	19	0	0
Mellem tyngde	87	10	2	132	0	21	14	16	0	0	69	0	0
Lille tyngde	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	**444**	**110**	**44**	**297**	**257**	**190**	**14**	**16**	**0**	**0**	**88**	**0**	**0**

Tabel 6.21) Vægtet analyse af "første kapitel" hos Systime.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	32%	9%	4%	15%	23%	15%	0%	2%
Uvægtet	54%	17%	4%	6%	6%	13%	0%	1%

Tabel 6.22) Fordeling af "stor tyngde" i "første kapitel" hos Systime, hhv. vægtet og uvægtet

Den største tyngde ligger altså i *færdighedstræning*. Derefter er teoriforståelse det næstmest repræsenterede tyngdepunkt, men dog sjældnere med stor tyngde end det er tilfældet for *begrebskendskab*. Det fremgår endvidere, at der er forholdsvis stor forskel på om analysen laves med eller uden vægte. Uden vægte ligger den væsentligste tyngde i *færdighedstræning* og *problemløsning*. Endeligt kan det bemærkes, at der er en vis tyngde i *med*- og *om*-dimensionerne.

To eksempler på vurderingen af identitetsbidrag hos Systimes:

Carstensen et. al (2007), side 17

ADDITION OG SUBTRAKTION
Man lægger brøker sammen og trækker brøker fra hinanden ved at finde en fællesnævner:

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{4}=\frac{8}{20}+\frac{15}{20}=\frac{23}{20} \quad , \quad \frac{5}{6}+\frac{3}{2}-\frac{8}{3}=\frac{5}{6}+\frac{9}{6}-\frac{16}{6}=-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3} \; .$$

Carstensen et. al (2007), side 22

EKSEMPEL 8. Vi viser endnu et par eksempler på addition af brøker, idet vi først bestemmer fællesnævner:

$$\frac{7}{9a}+\frac{3}{6b}=\frac{7\cdot 2b}{9a\cdot 2b}+\frac{3\cdot 3a}{6b\cdot 3a}=\frac{14b+9a}{18ab}$$

$$\frac{5}{2a}+\frac{3}{8b}-\frac{7}{4ab}=\frac{5\cdot 4b}{2a\cdot 4b}+\frac{3\cdot a}{8b\cdot a}-\frac{7\cdot 2}{4ab\cdot 2}=\frac{20b+3a-14}{8ab} \; .$$

Eksemplet til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *konventionskendskab*. Ikke fordi indholdet er en egentlig konvention, men fordi det etablerer det at addere og subtrahere brøker som om det er det. Eksemplet til højre er derimod vurderet til at have stor tyngde i *færdighedstræning*. Eksemplet har sit fokus på at træne eleverne til at kunne udføre de standard-handlinger der knytter sig til at reducere et bogstavudtryk.

Nedenfor er yderligere to eksempler. Eksemplet til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *problemløsning*. Der er åbenlyst ikke tale om noget der kan klares ved aktivering af færdigheder. Der er tale om at eleven må arbejde kreativt ikke bare med indholdet, men også med processen. Prøve sig frem, undersøge veje og blindspor og kunne skelne mellem dem. Eksemplet til højre er vurderet til at have stor tyngde i *intern refleksion*. Dette baserer sig på at identitetsbidragets væsentligste pointe omhandler metarefleksioner over matematik set indefra. Dels nogle refleksioner af historisk art, dels nogle refleksioner over hvad matematik er og kan. Der er derimod ikke tyngde i *teori*-dimensionen.

Carstensen et. al (2007), side 17

EKSPERIMENT 5

De fire 4-taller. Man møder med mellemrum den 'vandreopgave', at man skal skrive så mange naturlige tal som muligt ved hjælp af præcis fire 4-taller og de sædvanlige regneoperationer +, -,· og : sammen med kvadratrodstegn og potensopløftning. Desuden kan man bruge *udråbstegn* !, idet ! efter et tal betyder, at alle de hele, positive tal til og med tallet skal ganges med hinanden. Fx er

$$4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24 \quad , \quad 3! = 1{\cdot}2{\cdot}3 = 6 \quad , \quad 6! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5{\cdot}6 = 720 \; .$$

Vi kan så skrive

$$7 = 4 + 4 - (4{:}4) \quad , \quad 15 = 4{\cdot}4 - 4{:}4 \quad ,$$

$$6 = (4{\cdot}4 - 4){:}\sqrt{4} \quad , \quad 21 = 4! + 4{:}4 - 4 \; .$$

Altså kan tallene 6, 7, 15 og 21 fremstilles ved hjælp af præcis fire 4-taller. Hvem kan skrive flest?

En særlig sport er kun at bruge de fire elementære regningsarter, enten med fire 4-taller eller med fem 5-taller. Fx er

$$6 = 4 + (4 + 4){:}4 \quad , \quad 9 = 4 + 4 + 4{:}4 \quad ,$$

$$2 = (5{+}5){:}5{+}5{-}5 \quad , \quad 11 = (5 \cdot 5 + 5){:}5 + 5 \; .$$

Det er muligt på denne måde at skrive tallene fra 0 til 9 med fire 4-taller og tallene fra 0 til 12 med fem 5-taller. Prøv!

Carstensen et. al (2007), side 8 *(blå markering stammer fra kildematerialet, KBJ).*

INDLEDNING

Vi regner i dag med største selvfølge med de såkaldte *arabertal*. De 10 cifre 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 har ikke altid haft deres nuværende udseende. På fig. 1 ses cifrene som de tilnærmelsesvis har set ud år 800, 900, 1000 og 1400. Cifrene stammer fra Indien, og araberne førte dem med til Europa, hvor de slog igennem og erstattede romertallene i løbet af 1300- og 1400-tallet.

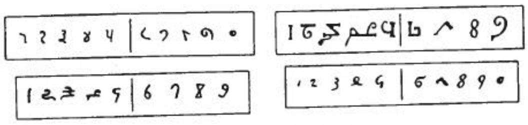


Fig. 1

Vort talsystem er et kulturgode, som næppe kan overvurderes. På trods af, at lommeregnere, grafregnere og cas-programmer (*computer algebra system*) befrier os fra en mængde kedsommeligt regnearbejde, skal vi i dagligdagen stadig beherske almindelig regning. Et par lidt snedige opgaver er disse: Hvad er

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100$$

og

$$1 - 2 + 3 - 4 + 5 - \ldots - 98 + 99 - 100 \;?$$

Begge opgaver lader sig, kun ved brug af papir og blyant, løse med lidt snilde.

Kapitel om "trigonometri"

Systimes første kapitel om trigonometri er kapitel 4 i bind 1, som blot hedder "Trigonometri". Kapitlet er bygget op i seks underafsnit. Først en kort historisk "Indledning" og så "Ensvinklede trekanter". Derpå følger "Sinus og cosinus" der defineres ud fra enhedscirklen og derpå "Tangens". Hovedindholdet følger derefter i to afsnit: "Den retvinklede trekant" og "Sinus- og cosinusrelationerne". Efter selve kapitlet følger et afsnit med "Historiske bemærkninger" og ni eksperimenter. Opgavebogen supplerer kapitlet med 110 opgaver.

I modsætning til de to historiske lærebogssystemer har dette kapitel ingen forudgående kapitler med principielle betragtninger om buemål eller teoretiske introduktioner til trigonometriske funktioner. Dette er igen et eksempel på, at det tekniske niveau er sat markant ned i forhold til tidligere tider. Det skal dog igen ikke i sig selv opfattes som et identitetsspørgsmål. Analysen af kapitlets fagidentitet viser (se bilag B.3 for fuld analyse):

Dimension (i alt)	**I** (1168)						**Med** (195)				**Om** (101)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	529	72	105	105	99	9	0	0	0	0	101	0	0
Mellem tyngde	0	183	14	34	12	0	13	69	111	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	6	0	2	0	0	0	0	0	0
Sum	529	255	119	139	117	9	15	69	111	0	101	0	0

Tabel 6.23) Vægtet analyse af kapitel om trigonometri hos Systime.

	a	b	c	d	e	f	M	O
Vægtet	52%	7%	10%	10%	10%	1%	0%	10%
Uvægtet	64%	11%	5%	12%	5%	1%	0%	2%

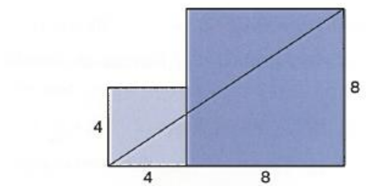
Tabel 6.24) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om trigonometri hos Systime, hhv. vægtet og uvægtet

Som det fremgår ligger *færdighedstræning* foran de øvrige kategorier i tyngde. Det kan bemærkes at *problemløsning* faktisk fylder en del. Ser man kun på hvor der falder stor tyngde mindskes dette dog noget. Til gengæld kan der i den situation observeres at *meta*-dimensionen faktisk fylder på lige fod med de næsttungeste tyngdepunkter i *teori*-dimensionen. Der er altså en del vægt til identitetsbidrag der har primær tyngde i *intern refleksion.* Dette adskiller kapitlet fra det tilsvarende kapitel analyseret i de historiske lærebogssystemer. Der falder også en del tyngde i *anvendelses*-dimensionen, men ingen bidrag hvor denne har stor tyngde. Det er især *service* der er fokus på her.

Et par eksempler på analysen:

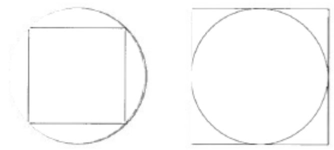
Carstensen et. al (2010), side 54

446. På figuren ses to kvadrater, der støder op til hinanden. Deres sidelængder er 4 og 8. En linje fra nederste venstre hjørne til øverste højre afskærer en trekant af det lille kvadrat. Hvad er denne trekants areal?



Carstensen et. al (2007), side 63

4109. Hvad passer bedst: en kvadratisk pløk i et cirkulært hul eller en cirkulær pløk i et kvadratisk hul, dvs. hvilken af mulighederne udfylder den største procentdel af arealet i hullet?



Identitetsbidraget til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *færdighedstræning* og mellem tyngde i *problemløsning*. Grundlæggende set er opgaven en rimelig standardiseret opgave i at benytte sætningen om ensvinklede trekanter i praksis. Der opstår alligevel et problemaspekt fordi denne vej til løsningen kræver et enkelt eller to mentale spadestik at nå ned til. Opgaven til højre er vurderet med stor tyngde i *problemløsning*. Opgavebesvareren må selv finde en vej til at løse problemet – det klares ikke alene ved aktivering af færdigheder. I tillæg er opgaven vurderet til i *anvendelses*-dimensionen at have tyngde i *motivation*. Det er ikke et interessant problem i virkeligheden, som matematik afdækker. Det er et virkeligt formuleret problem af matematisk interesse. Virkeligheden skitserer altså rammen for problemet (det skal være meningsfuldt), men matematikken dikterer indholdet (hvilken matematik skal på banen).

Kapitel om funktioner

Systimes første kapitel om funktioner er første binds kapitel 8 som blot hedder "Funktioner". Forud for kapitlet har været kapitlerne "5. Linjer og vektorer", "6. Cirkler og vinkler" og "7. Linjer og afstande". Her har analytiske fremstillinger klaret grundintroduktionen til koordinatsystemer.

Kapitel 8 består af 8 underafsnit. Først det principielle afsnit "Funktionsbegrebet". Derpå om "Monotoni" og "Maksimum og minimum". Og endeligt om "Regning med funktioner", "Sammensætning af funktioner", "Omvendt funktion" og to afsnit om sidstnævntes forskrift og eksistens. Kapitlet følges op af to korte bemærkninger om funktioner med flere variable og lidt om historien omkring begrebet. Derpå tre eksperimenter og supplering af 56 opgaver i opgavebogen. Den samlede analyse af kapitlet ser ud som følger (se fuld analyse i bilag B.3):

Dimension (i alt)	**I** (954)						**Med** (191)				**Om** (13)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	399	25	0	66	218	55	0	0	11	0	13	0	0
Mellem tyngde	59	0	0	74	0	36	0	121	35	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	25	0	24	0	0	0	0	0
Sum	458	25	0	140	218	116	0	145	46	0	13	0	0

Tabel 6.25) Vægtet analyse af kapitel om funktioner hos Systime.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	51%	3%	0%	8%	28%	7%	1%	2%
Uvægtet	67%	4%	0%	6%	16%	5%	1%	1%

Tabel 6.26) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om funktioner hos Systime, hhv. vægtet og uvægtet

Også dette kapitel har langt det meste af sin tyngde i *færdighedstræning* og hovedparten af den resterende tyngde i *begrebskendskab*. Det bemærkes at der er en vis tyngde i *anvendelses*-dimensionen, om end der er få bidrag med stor tyngde her. Tyngden ligger mest i *motivation*, men også med en del bidrag til *service*.

Kapitel om differentialregning

Differentialregning behandles første gang i systemets andet bind. Det sker i kapitel 3, "Differentialkvotient". De foregående to kapitler – "1. Logaritmefunktioner" og "2. Statistik" – har ingen særlig relevans for emnet. Det efterfølgende kapitel omhandler "Regneregler for differentialkvotienter" og kapitel 6 omhandler "Monotoniforhold".

Det analyserede kapitel 3 består af otte delafsnit. Det tager afsæt i begreberne "Funktionstilvækst" og "Kontinuitet" som grundlag for at definere "Differentialkvotient". Derpå opbygges begreberne "Tangent og sekant" og derfra til "Differentialkvotient generelt". Derpå følger afsnit om "Differentiabilitet og kontinuitet", "Simple differentiale funktioner" og "Tangent[ens ligning, kbj]". Også her er det ekstremt stringente niveau fra tidligere bogsystemer væk, men tilgangen minder alligevel en hel del om "gamle dage". Analysen af kapitlet giver (se fuld analyse i bilag B.3):

Dimension (i alt)	**I** (1111)						**Med** (143)				**Om** (11)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	347	0	0	244	248	58	0	0	0	0	11	0	0
Mellem tyngde	38	20	0	40	61	36	19	124	0	0	0	0	0
Lille tyngde	0	19	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	385	39	0	284	309	94	19	124	0	0	11	0	0

Tabel 6.27) Vægtet analyse af kapitel om differentialregning hos Systime.

	a	b	c	d	e	f	M	O
Vægtet	38%	0%	0%	27%	27%	6%	0%	1%
Uvægtet	57%	0%	0%	17%	24%	1%	0%	1%

Tabel 6.28) Fordeling af "stor tyngde" i kapitel om differentialregning hos Systime, hhv. vægtet og uvægtet

Den største vægt er også her lagt på *færdighedstræning*, mens der dog også optræder en betydelig tyngde i *teoriforståelse* og *begrebskendskab*. Der er en smule tyngde i de to øvrige dimensioner, men langt overvejende ligger tyngden i *teori*-dimensionen. Eksempler fra analysen er følgende:

Carstensen et. al (2006), side 87

FUNKTIONSTILVÆKST

Vi får brug for begrebet *funktionstilvækst* for en funktion ud fra et punkt x_0 i definitionsmængden. Et punkt lidt til højre eller lidt til venstre for x_0 på x-aksen kaldes et *nabopunkt* til x_0. Et sådant punkt betegnes med $x_0 + h$, hvor h kan være positiv (hvis vi er gået til højre for x_0) eller negativt (til venstre), se fig. 1.

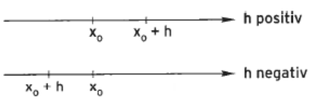


Fig. 1

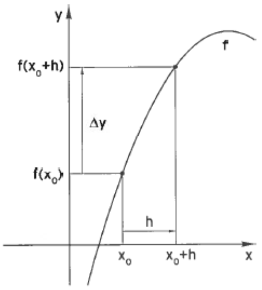


Fig. 2

Funktionstilvæksten Δy (Δ er det græske bogstav *delta*) defineres ved

$$\Delta y = f(x_0 + h) - f(x_0)\,.$$

Denne tilvækst kan være positiv, negativ eller 0, afhængig af grafens udseende omkring punktet x_0. På fig. 2 er både h og Δy positive.

Carstensen et. al (2006), side 105

TANGENT

Vi har allerede fundet ligninger for tangenter til visse grafer. Hældningen a for tangenten i punktet $(x_0, f(x_0))$ til grafen for funktionen f er differentialkvotienten $f'(x_0)$ i punktet. Fra teorien for den rette linje har vi, at linjen gennem (x_0, y_0) med hældning a har ligningen

$$y - y_0 = a(x - x_0)\,,$$

så tangenten får ligningen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

SÆTNING 1
Hvis f er differentiabel i x_0, har tangenten til grafen i punktet $(x_0, f(x_0))$ ligningen

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)\,.$$

Carstensen et. al (2006a), side 28

202.* Tegn graferne for hver af nedenstående funktioner, og angiv om funktionerne er kontinuerte.

$$f_1(x) = x^2 \quad , \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad , \quad f_3(x) = \frac{1}{2}\cdot 5^{x-1}\,,$$

$$f_4(x) = 2x - 1\,, \quad f_5(x) = 2e^{3x-1}\,, \quad f_6(x) = \frac{x+2}{x-1}\,.$$

Eksemplet til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *begrebskendskab*. Det gør det fordi hovedindholdet er konstruktion af begrebet "funktionstilvækst". Der er ikke tale om en teoretisk pointe, idet fokus ikke er lagt på relationer mellem begreber eller på at stadfæste andre sammenhænge af generel art. Eksemplet øverst til højre er derimod vurderet til stor tyngde i *teoriforståelse*, fordi det handler om at etablere en generel forbindelse mellem begreber som funktion, graf, tangent, hældning, mv. Samtidig er det teoretisk fordi der er tale om en generel behandling af mange konkrete problemer. Det er tilgengæld ikke *ræsonneret retfærdiggørelse*, fordi der ikke er lagt nogen vægt på det at retfærdiggøre teorien. Sætningen fremføres alene som et teoretisk udsagn der skal læres.

Eksemplet nederst til højre er i hovedsagen en opgave hvis tyngde ligger i *færdighedstræning*, fordi opgavens væsentligste skridt ligger i at kunne gennemføre standardhandlingen "at tegne en graf". Bidraget har imidlertid også tyngde i begrebskendskab, fordi den anden del af opgaven er med til at udvikle begrebet "kontinuitet" hos eleven.

Samlet vurdering

I tabel 6.29 og 6.30 er resultaterne af de fire vægtede analyser fremstillet samlet. Som det ses er *færdighedstræning* det mest repræsenterede i alle analyserne og dermed også klart det tungeste tyngdepunkt i systemet som helhed. I to af kapitlerne fremstår *begrebskendskab* som det klart næsttungeste, mens det i de to øvrige kapitler er næsttungest sammen med et eller flere andre tyngdepunkter. Dermed fremstår dette også næsttungest i analysen af systemet som helhed. Tredjetungest er *teorikendskab*.

I forhold til de to historiske lærebogssystemer er der kommer væsentligt mere tyngde i *anvendelses*- og *meta*-dimensionerne. Dette ses tydeligst i tabel 6.29, da især megen af tyngden i *anvendelses*-dimensionen er af mellem-tyngde. Det er således teori-dimensionen der bærer den store tyngde i næsten alle identitetsbidrag, mens *anvendelse* hører til i mange af bidragene som en mindre fremtrædende pointe. *Meta*-dimensionen har sjældnere tyngde end *anvendelse*, men til gengæld er det tungere. Således fremstår meta-*dimensionen* tydeligere i den samlede analyse.

Meta-dimensionen er dog kun repræsenteret ved *intern refleksion* – især det historiske aspekt.

Dimension (i alt)	**I** (4575)						**Med** (559)				**Om** (213)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	1632	192	147	580	822	291	0	0	11	0	144	0	0
Mellem tyngde	184	213	16	280	73	93	46	330	146	0	69	0	0
Lille tyngde	0	21	0	0	6	25	2	24	0	0	0	0	0
Sum	1816	426	163	860	901	409	48	354	157	0	213	0	0

Tabel 6.29) Vægtet analyse af alle fire udvalgte kapitler i Systime

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Første kapitel	***32%***	9%	4%	15%	***23%***	15%	0%	2%
Trigonometri	***52%***	7%	10%	10%	10%	1%	0%	10%
Funktioner	***51%***	3%	0%	8%	***28%***	7%	1%	2%
Differentialregning	***38%***	0%	0%	***27%***	***27%***	6%	0%	1%
Samlet	***43%***	**5%**	**4%**	**15%**	***22%***	**8%**	**0%**	**4%**

Tabel 6.30) Fordeling af "stor tyngde" i vægtet analyse af de fire udvalgte kapitler i Systime.

6.2.2 Gyldendal: Clausen, Schomacker og Tolnø

Gyldendals lærebogssystem "Gyldendals Gymnasiematematik" i tre bind (B1, B2 og A) er skrevet af Flemming Clausen, Gert Schomacker og Jesper Tolnø. De to førstnævnte havde tidligere udgivet lærebogssystemet "Ind i matematikken" sammen med Poul Printz. "Gyldendals Gymnasiematematik" kan altså på forfattersiden opfattes som en videreførelse af dette tidligere system, oprindeligt udgivet i slutningen af 1980'erne på forlaget Munksgård, men i sidste halvdel af 1990'erne udsendt i 2. udgave af Gyldendal.

Gyldendals Gymnasiematematik udkom med 1. udgave af B1-bogen i 2005, B2-bogen i 2006 og A-bogen i 2007. Senere er der også udsendt en 2. udgave, men her tages afsæt i 1. udgaven. Hver udgivelse i serien består af to bøger. En *grundbog* med tekst-indhold og en *arbejdsbog* som indeholder kortfattede sammenfatninger af stoffet, en samling af kapitel-specifikke øvelser som der refereres til undervejs i teksten i grundbogen og en samling af kapitel-specifikke opgaver som der almindeligvis ikke refereres til i grundbogen. I analysen indgår øvelserne derfor som placeret inde i grundbogsteksten, mens opgaverne indgår særskilt i forlængelse af kapitlet.

Første kapitel i første bind

Det første kapitel i Gyldendal B1-grundbogen er kapitlet om trigonometri. I B1-arbejdsbogen findes imidlertid et første kapitel kaldet ”Værktøjer” som gennemgår det stof der går forud for læsning af bøgerne. Dette kapitel regnes her for bogsystemets ”første kapitel i første bind”.

Kapitlet er delt i fire underafsnit. Det første hedder ”Geometri” og gennemgår skematisk forskellig teoretisk viden om matematiske objekter sorteret efter deres navn: ”Cirklen”, ”Vinklen”, ”Trekanten” og ”Firkanten”. Anden del hedder ”Tal” og gennemgår ”mængder”, ”intervaller” og en hel del ”regneregler”. Tredje del hedder ”Algebra” og omhandler bogstavregning, mens fjerde del hedder ”Ligninger” og gennemgår førstegradsligninger med én og to ubekendte.

Analysen af kapitlets fagidentitet gav følgende resultat (se bilag B.4 for den fulde analyse):

Dimension (i alt)	**I** (1272)						**Med** (5)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	525	0	0	150	175	23	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	67	0	0	46	115	53	0	5	0	0	0	0	0
Lille tyngde	46	0	0	0	0	72	0	0	0	0	0	0	0
Sum	638	0	0	196	290	148	0	5	0	0	0	0	0

Tabel 6.31) Vægtet analyse af ”første kapitel” hos Gyldendal.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	60%	0%	0%	17%	20%	3%	0%	0%
Uvægtet	81%	0%	0%	10%	8%	1%	0%	0%

Tabel 6.32) Fordeling af ”stor tyngde” i ”første kapitel” hos Gyldendal, hhv. vægtet og uvægtet

Den overvejende tyngde er her placeret i *færdighedstræning*, mens den resterende fordeler sig mellem *teoriforståelse* og *begrebsforståelse*. Der er altså tale om at så godt som al tyngde findes i *teori*-dimensionen. Her to gange to eksempler på vurderinger af identitetsbidrag i kapitlet:

Clausen et. al (2005b), side 27

Rødder

Rodregler	Eksempler
Definition: $\sqrt[n]{a}=b$ betyder $b^n=a$, $a \geq 0$ og $b \geq 0$. Hvis n er ulige, er $\sqrt[n]{-a}=-\sqrt[n]{a}$	$\sqrt[4]{16}=2$ da $2^4=16$ $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}=-2$ da $(-2)^5=-32$
$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{125\cdot 343}=\sqrt[3]{125}\cdot\sqrt[3]{343}=5\cdot 7=35$
$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$
$\sqrt[q]{a^p}=a^{\frac{p}{q}}$	$\sqrt[5]{7^4}=7^{\frac{4}{5}}$, $\sqrt{37}=37^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt[3]{(-4)^8}=(-4)^{\frac{8}{3}}$

Clausen et. al (2005b), side 12

De fire regningsarter

Addition (plus) $a+b=c$ led + led = sum	Multiplikation (gange) $a\cdot b=c$ faktor · faktor = produkt
Subtraktion (minus) $a-b=c$ led − led = differens	Division (delt med) $a:b=\frac{a}{b}=c$ dividend : divisor = kvotient

For addition og multiplikation gælder:

Kommutativ lov:	$a+b=b+a$	$a\cdot b=b\cdot a$
Associativ lov:	$a+(b+c)=(a+b)+c$	$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$
Distributiv lov:	$a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$	

Clausen et. al (2005b), side 38	Clausen et. al. (2005b), side 31
Øvelse 832: Hvorfor er følgende rigtigt? $\sqrt[5]{32}=2$, $\sqrt[3]{1331}=11$, $\sqrt[4]{625}=5$, $\sqrt[7]{-128}=-2$, $\sqrt[10]{59049}=3$, $\sqrt[7]{-16384}=-4$	**Øvelse 802:** Udregn: a) $9+6:3$ b) $9-8:2$ c) $18:6-7$ d) $3+12:4-6$ e) $55:11-28:7$ f) $20:4+7:1-3\cdot 7$ g) $9+16:4-5-14:7$ h) $8\cdot 7-27:3-8+6\cdot 1$

De to identitetsbidrag til venstre er begge vurderet med stor tyngde i *teoriforståelse*. Den øverste fordi den er fokuseret på at fremstille et generelt teoretisk resultat for regneoperationen ”rod”. Den nederste fordi den i forlængelse af denne fremstilling beder eleven arbejde med konkret brug af teorien for at understøtte forståelsen af denne. Det er altså forståelsen af teorien, snarere end træning af regnefærdigheder, der står i centrum.

Det øverste identitetsbidrag til højre er vurderet med stor tyngde i *begrebskendskab*. Det er det fordi det forsøger at putte indhold på begreber knyttet til overbegrebet ”regningsarter”. Det gælder også de tre nævnte love, som netop ikke har karakter af at være et ”teoretisk resultat”. Eksemplet nedenunder er vurderet med stor tyngde i *færdighedsregning*, idet øvelsen sigter mod at oparbejde en flydende brug af regnearterne (og tilhørende hierarki).

Overordnet set kan man altså sige om dette ”første kapitel” at det bærer på en fagidentitet der i høj grad er rettet mod teori-dimensionen med særlig tyngde i *færdighedstræningen.*

Kapitel om trigonometri

Kapitlet ”Geometri og trigonometri” optræder som det første kapitel i Grundbog B1 og er således også bogsystemets første (og i øvrigt eneste) kapitel om trigonometri. Det er bygget op med en stribe underafsnit der først taler om ”trekanter” derpå om trigonometri for ”retvinklede trekanter” og så ”vilkårlige trekanter”. Derpå følger et mere anvendelsesorienteret afsnit om ”hvor højt, hvor langt væk, hvor stort” og til sidst et afsnit om ”konstruktion”. Mellem de to sidste afsnit er en længere artikel – ”Landmåling og korttegning” – med et mere matematik-historisk indhold.

Analysen af kapitlets fagidentitet gav følgende resultat (se bilag B.4 for den fulde analyse):

Dimension (i alt)	**I** (1257)						**Med** (497)				**Om** (459)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	580	4	130	167	131	0	0	29	54	4	4	209	14
Mellem tyngde	142	42	0	24	10	0	0	81	329	0	204	14	0
Lille tyngde	0	27	0	0	0	0	0	0	0	0	14	0	0
Sum	**722**	**73**	**130**	**191**	**141**	**0**	**0**	**110**	**383**	**4**	**222**	**223**	**14**

Tabel 6.33) Vægtet analyse af kapitel om trigonometri hos Gyldendal.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	44%	0%	10%	13%	10%	0%	7%	17%
Uvægtet	66%	1%	6%	12%	7%	0%	6%	3%

Tabel 6.34) Fordeling af ”stor tyngde” i kapitel om trigonometri hos Gyldendal, hhv. vægtet og uvægtet

Kapitlet har størst tyngde i *færdighedstræning*, men det springer i øjnene at dette kapitel har væsentligt mere "stor tyngde" i *anvendelses*- og *meta*-dimensionen end noget tidligere analyseret kapitel. Det synes altså i væsentlig grad at være en særlig pointe i kapitlet at fremstille matematik som et fag der ikke bare handler om matematisk teori, men også om at arbejde med problemer udenfor matematikken og at se på faget ude fra. Samtidig ses at tyngden i *med*- og *om*-dimensionerne er fordelt ud på de fleste af tyngdepunkterne i de to dimensioner.

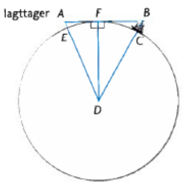
Her følger fire eksempler på identitetsbidrag med stor tyngde i *med* eller *om*-dimensionen:

<table>
<tr>
<td>
Clausen et. al. (2005a), s. 212

j) Hvordan målte man vinklerne ved den trigonometriske opmåling? Hvor lå den anvendte basislinje? Hvor lang var den?
</td>
<td>
Clausen et. al. (2005a), s. 210

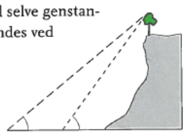
Opgaver
Opgaver hørende til Tinne Hoff Kjeldsens artikel "Landmåling og korttegning":
a) Hvem gav anledning til, at opmåling af Danmark blev påbegyndt? Hvornår blev opmålingen påbegyndt? Under hvilken konge? Hvem var Thomas Bugge? Hvem var Caspar Wessel, og hvad var hans matematiske indsats?
</td>
</tr>
<tr>
<td>
Clausen et. al. (2005a), s. 36

Eksempel 30
■ Hvis iagttageren i eksempel 29 ikke befinder sig i højde med havoverfladen, er modellen på figur 144 ovenfor ikke god nok, og vi må lave en ny:

Figur 145


At bestemme afstanden fra iagttageren til mastetoppen svarer til at finde længden af linjestykket AB. Dette er muligt, hvis blot $|BC|$ og $|AE|$ er kendt. Da tangenten AB til cirklen står vinkelret på radius i røringspunktet F, kan problemet løses ved at beregne $|AF|$ og $|FB|$. Det kan lade sig gøre ved at benytte fremgangsmåden fra eksempel 29 på de to retvinklede trekanter AFD og BFD.
</td>
<td>
Clausen et. al. (2005a), s. 38

Det næste eksempel er egentlig en fortsættelse og udbygning af de to foregående. Vi vil nemlig se på den situation, hvor vi skal finde højden af en genstand, uden at vi kan komme helt ind til selve genstanden. Vi belyser, hvordan problemet kan overvindes ved at finde højden til trætoppen på figur 150.


Figur 150

Før vi går i gang, skal vi lige gøre opmærksom på, at det for problemets løsning ved hjælp af retvinklede trekanter er nødvendigt at løse to ligninger med to ubekendte. Det kan man gøre enten ved hjælp af et CAS-værktøj eller pr. håndkraft. Hvordan man gør det sidste, fremgår af arbejdsbogen. Hvis man vælger at argumentere ved hjælp af ikke-retvinklede trekanter, kan problemet i stedet løses ved brug af sinusrelationerne (øvelse 153).
</td>
</tr>
</table>

Det øverste bidrag til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *med*-dimensionens tyngdepunkt "værktøj". Spørgsmålet er åbent og ikke i udgangspunktet entydigt matematisk. Der er altså tale om at eleven skal besvare et ikke-matematisk spørgsmål og i den proces optræder matematik som en værktøjskasse med muligvis brugbare værktøjer. Bidraget øverst til højre er vurderet til at have stor tyngde i *om*-dimensionens tyngdepunkt om *intern refleksion*, idet spørgsmålet har fokus på at eleven skal undersøge matematikken og rammerne for dens udvikling, rent historisk.

Bidraget nederst til venstre er vurderet med stor tyngde i *motivation*, mens bidraget nederst til højre er vurderet med stor tyngde i *service*. Forskellen ligger i hvor realistisk opgaven fremstår. Det forekommer ikke realistisk at være i en situation hvor en observatør kender højden af det skib han lige netop kan skimte toppen af (selvom det naturligvis kan være tilfældet). Her sætter matematikken altså rammerne for spørgsmålet. Det andet tilfælde kan sagtens være et realistisk problem. Rammen er sat af eksterne forhold. Men indholdet er afgrænset efter "hvad matematik kan".

Kapitel om funktioner

Kapitlet ”Variabelsammenhænge og funktioner” er andet kapitel i Grundbog B1. Kapitlet er delt i syv underafsnit. Det første er en indledning med fokus på variabelsammenhænge. Derpå følger afsnit om ”lineær regression”, ”ligninger og kurver”, det modelorienterede ”verden og variabelsammenhænge”, ”vigtige funktioner” med introduktion til lineær-, eksponentiel- og potensfunktionerne, ”formler” og til sidste ”mere regression”. Kapitlet er altså bygget op i afsnit der veksler mellem en model- og anvendelsesorienteret tilgang og en mere ren teoretisk tilgang, hvor funktioner studeres i egen ret. Analysen af kapitlets fagidentitet har givet følgende resultat (se bilag B.4 for fuld analyse):

Dimension (i alt)	**I** (2531)						**Med** (1213)				**Om** (149)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	483	76	49	198	918	42	0	66	248	2	0	115	0
Mellem tyngde	404	65	61	88	70	77	0	394	483	20	34	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	887	141	110	286	988	119	0	460	731	22	34	115	0

Tabel 6.35) Vægtet analyse af kapitel om funktioner hos Gyldendal.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	22%	3%	2%	9%	42%	2%	14%	5%
Uvægtet	39%	3%	1%	10%	34%	2%	9%	1%

Tabel 6.36) Fordeling af ”stor tyngde” i kapitel om funktioner hos Gyldendal, hhv. vægtet og uvægtet

Den vekslende tilgang ses ved, at *anvendelses*-dimensionen fylder forholdsvist meget og at *meta*-dimensionen også har netop målbar tyngde. I *teori*-dimensionen er langt den største tyngde lagt i tyngdepunktet *begrebskendskab*, mens *færdighedstræning* er næsttungest. Kapitlet fremstår altså med en fagidentitet hvor matematik er en samling af begreber, som gør det muligt at tale om situationer som ikke som udgangspunkt er af matematisk art.

Et eksempel på dette fokus er følgende udklip

Clausen et. al. (2005a), s. 99

■ Proportionalitet

Eksempel 82

1) Hvis V angiver rumfanget (cm^3), mens m angiver massen (g) af en klump jern, er m proportional med V:

$$m = d \cdot V\ .$$

Proportionalitetskonstanten d er lig med jerns densitet (7,87 g/cm^3).

2) Hvis kiloprisen for kartofler er 19 kr., er prisen p (kr.) ved køb af kartofler proportional med den købte mængde x (kg):

$$p = 19x\ .$$

Proportionalitetsfaktoren er kiloprisen.

3) En genstand bevæger sig langs en ret linje, således at hastigheden v (meter pr. sekund) er proportional med tiden t (sekunder):

$$v = at\ .$$

Proportionalitetsfaktoren a er accelerationen.

4) Arealet A af et rektangel med bredden 50 er proportional med rektanglets længde L:

$$A = 50L\ .$$

5) Omkredsen O af en cirkel er proportional med radius r:

$$O = 2\pi r\ .$$

Proportionalitetsfaktoren er 2π.

Som identitetsbidrag er dette klip vurderet til at have stor tyngde i *begrebskendskab*, fordi eksemplet har hele sit fokus på at understøtte begrebet ”proportionalitet”. Samtidig har klippet mellem tyngde i anvendelses-dimensionens tyngdepunkt *motivation*. Dette fordi indholdet i eksemplerne på anvendelse er valgt af hensyn til matematikken.

Kapitel om differentialregning

Kapitlet ”Differentialregning” findes som første kapitel af andet bind ”Grundbog B2”. Det er bygget op i otte afsnit, hvoraf det første er en motiverende indledning om hastighed. Derpå følger afsnit om ”Differentialkvotient”, ”Regneregler”, ”Tangentens ligning”, ”Monotoniforhold”, ”Optimering”, ”Eksponential-, logaritme og potensfunktioner” og til sidst ”Vækst og væksthastighed”. I dette kapitel er der altså et mere direkte fokus på det teoretiske aspekt, mens anvendelserne findes først og sidst. Analysen af kapitlets fagidentitet viser følgende (se bilag B.4 for fuld analyse):

Dimension (i alt)	**I** (1501)						**Med** (316)				**Om** (0)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	529	75	93	227	388	9	0	0	0	0	0	0	0
Mellem tyngde	31	19	4	60	4	62	0	45	271	0	0	0	0
Lille tyngde	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Sum	560	94	97	287	392	71	0	45	271	0	0	0	0

Tabel 6.37) Vægtet analyse af kapitel om differentialregning hos Gyldendal.

	a	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Vægtet	40%	6%	7%	17%	29%	1%	0%	0%
Uvægtet	54%	5%	9%	14%	18%	1%	0%	0%

Tabel 6.38) Fordeling af ”stor tyngde” i kapitel om differentialregning hos Gyldendal, hhv. vægtet og uvægtet

I modsætning til de to foregående kapitler der blev analyseret, fremstår dette kapitel med kun forholdsvist lille tyngde i *anvendelses*-dimensionen og slet ingen i *meta*-dimensionen. Der er således tale om at tyngden i kapitlets fagidentitet i det væsentlige ligger i *teori*-dimensionen. Her er den største tyngde placeret i tyngdepunktet *færdighedstræning*, den næststørste i *begrebskendskab* og den sidste i *teoriforståelse*. I kapitlet optræder matematik altså som et fag med fokus på færdigheder og begreber samt på at binde begreberne sammen i en teori.

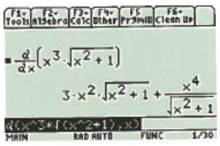
Her følger to eksempler på identitetsbidrag fra kapitlet:

Clausen et. al (2005c), s. 22	Clausen et. al (2005c), s. 14

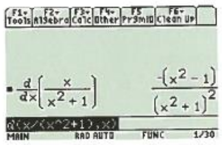
Eksempel 10

■ Differentiation med et CAS-værktøj

Ved mere komplicerede funktionsforskrifter kan man ikke klare sig med de fire nævnte regneregler. I sådanne tilfælde kan man overlade arbejdet til et CAS-værktøj:



Figur 112

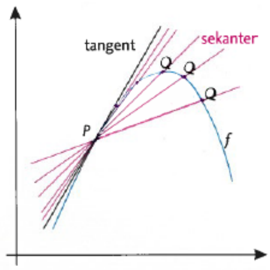


Figur 113

For $f(x) = x^3 \cdot \sqrt{x^2+1}$ fås $f'(x) = 3x^2 \cdot \sqrt{x^2+1} + \dfrac{x^4}{\sqrt{x^2+1}}$.

For $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ er $g'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Den opskrift, der fører frem til tangenten, er illustreret grafisk på figur 109. Røringspunktet P er markeret med blåt, og fem positioner af Q og de tilhørende sekanter er markeret med rødt. Når punktet Q går mod P, nærmer sekanterne sig tangenten.



Figur 109

Identitetsbidraget til venstre er vurderet til at have stor tyngde i *færdighedstræning* og angiver en af de færdigheder, som kapitlet har stort fokus på, nemlig at kunne bestemme den afledte funktion ved differentiation af en given funktion. I dette eksempel sker det i hovedsagen ved aktivering af et passende værktøj. Identitetsbidraget til højre er vurderet til at have stor tyngde i *begrebskendskab*, fordi fokus ligger i at konstruere begrebet *tangent* ud fra det allerede kendte begreb *sekant*. Der er altså her to eksempler på hvordan kapitlets fagidentitet primært udfolder sig.

Samlet vurdering

I tabel 6.39 og 6.40 er analysen af Gyldendals lærebogssystem sammenfattet. Gyldendal ligner overordnet set Systimes i forhold til at den væsentligste tyngde ligger i *færdighedstræning* og *begrebsforståelse.* Forskellene mellem de to systemers fagidentiteter er altså mere nuancer, end det er grundlæggende forskelligheder. Som en nuance kan det bemærkes at tyngden mellem de to bærende tyngdepunkter er mere ligeligt fordelt i Gyldendal, mens Systime havde større fokus på færdighedstræningen. Endvidere kan det bemærkes at *konventionskendskab* fylder væsentligt mindre hos Gyldendal, end hos Systime.

Den måske mest markante nuance er dog nok i hvor høj grad Gyldendal har tyngde i *anvendelses-* og *meta*-dimensionerne. De fylder for det første meget i det hele taget – hvilket ses af tabel 6.39. Men også hvis man blot kigger på fordelingen af "stor tyngde" ses det, at de to dimensioner fylder en hel del mere hos Gyldendal. *Med-* og *om*-aspekterne er altså i højere grad selvstændige pointer hos Gyldendal, end det ses i de tre andre analyserede lærebogssystemer.

Samlet set kan man altså sige at også Gyldendal-systemets fagidentitet bærer præg af matematik som en *teoretisk* disciplin, som først og fremmest har fokus på sine egne interne spørgsmål. Og at disse spørgsmål i øvrigt handler om at besidde bestemte færdigheder og at kunne bestemte begreber. Men at fagidentiteten hos Gyldendal *også* fremstiller matematik som et fag der har noget at byde på i forhold til udefrakommende spørgsmål og til at reflektere over faget – ikke mindst dets historiske udvikling og rolle.

Dimension (i alt)	**I** (6561)						**Med** (2031)				**Om** (608)		
Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Stor tyngde	2117	155	272	742	1612	74	0	95	302	6	4	324	14
Mellem tyngde	644	126	65	218	199	192	0	525	1083	20	238	14	0
Lille tyngde	46	27	0	0	0	72	0	0	0	0	14	0	0
Sum	2807	308	337	960	1811	338	0	620	1385	26	256	338	14

Tabel 6.39) Vægtet analyse af alle fire udvalgte kapitler i Gyldendal

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Første kapitel	***60%***	0%	0%	17%	20%	3%	0%	0%
Trigonometri	***44%***	0%	10%	13%	10%	0%	7%	17%
Funktioner	22%	3%	2%	9%	***42%***	2%	14%	5%
Differentialregning	***40%***	6%	7%	17%	***29%***	1%	0%	0%
Samlet	***37%***	**3%**	**5%**	**13%**	***28%***	**1%**	**7%**	**6%**

Tabel 6.40) Fordeling af "stor tyngde" i vægtet analyse af de fire udvalgte kapitler i Gyldendal.

6.3 Sammenligning af lærebogssystemerne

Efter at have analyseret fagidentiteten hos fire lærebogssystemer – to historiske og to nutidige – vil dette afsnit forsøge at sammenstille de fire analyser, med henblik på at diskutere i hvilken forstand der kan tales om forskellige fagidentiteter. Herunder hører en vurdering af om der kan tales om en *historisk udvikling* samt om vi for de aktuelle systemers vedkommende kan tale om forskellige tendenser.

I tabel 6.41 ses en sammenstilling af de fire samlede opgørelser over den vægtede fordeling af "stor tyngde" mellem de forskellige tyngdepunkter hos hvert af de fire analyserede bogsystemer.

Lærebogssystem	**År**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	1942	23%	0%	***31%***	***27%***	17%	1%	0%	0%
Kristensen og Rindung	1962	21%	2%	10%	***31%***	23%	12%	0%	0%
Systime	2005	***43%***	5%	4%	15%	***22%***	8%	0%	4%
Gyldendal	2005	***37%***	3%	5%	13%	***28%***	1%	7%	6%

Tabel 6.41) Sammenstilling af de samlede vægtede fordelinger af "stor tyngde".

Det første og væsentligste overordnede indtryk er, at *teori*-dimensionen er stærkt dominerende for alle lærebogssystemerne, men at tendensen også synes at være, at de øvrige dimensioner får en selvstændig plads i de aktuelle systemer, modsat de historiske hvor der kun i meget begrænset omfang optræder identitetsbidrag med tyngde i *med*- og *om*-dimensionerne.

Og antallet af identitetsbidrag med stor tyngde i disse to dimensioner er meget lille for de to historiske lærebogssystemer. Det indikerer altså at disse to dimensioner helt gennemgående kun spiller en sekundær rolle for den måde faget fremstilles på i disse. Det kan altså konkluderes, at fagidentiteten historisk har været fokuseret på matematik som en rent *teoretisk* konstruktion, mens *meta*-aspektet er begyndt at fylde lidt mere i de aktuelle systemer, som til gengæld adskiller sig fra hinanden ved at matematik som *anvendt* disciplin i et vist omfang fremstår som en selvstændig pointe omkring faget hos Gyldendal, men ikke hos Systime.

Hvis man kigger på hvordan tyngden er placeret inden for teoridimensionen, så ses det at for alle lærebogssystemerne vejer tyngdepunktet *færdighedstræning* forholdsvist meget, men dog relativt mest for de to aktuelle lærebogssystemer. Det samme gør sig gældende for *begrebskendskab*, der synes at være det tyngdepunkt med mest kontinuerlig repræsentation.

Forskellene over tid synes især at koncentrere sig om *teoriforståelse*, der har stor tyngde i de historiske lærebogssystemer, mens det vejer væsentligt mindre i de aktuelle, uden dermed at være forsvundet. Og om *ræsonneret retfærdiggørelse*, som især vejer tungt i det ældste lærebogssystem, en del mindre i det næstældste og meget lidt i de aktuelle.

Endeligt er der *konventionskendskab*, som udvikler sig lidt særligt. Det fylder næsten intet hos Andersen og Mogensen eller hos Gyldendal, mens det fylder mærkbart mere hos Systime (dvs. hos Carstensen og Frandsen) og især hos Kristensen og Rindung. Her synes altså at være tale om en særlig identitet på tværs af historien, hvor konventioner om især notation synes at indtage en betydelig plads i matematikkens identitet som fag.

Sammenligner man hvordan de fire analyserede lærebogssystemer lægger ud i deres første kapitel, kan man se et tydeligt billede (se tabel 6.42). For det første synes ingen af systemerne her at have mærkbar tyngde udenfor teoridimensionen. Dernæst kan det ses at *begrebskendskab* hos alle systemer har den ”næststørste tyngde”. Indgangen til de fire systemer er altså ens på det punkt at de alle vægter matematik som en samling af begreber højt. Men samtidig ses forskellige profiler af hvad faget faktisk synes at dreje sig om. Andersen og Mogensen med fokus på *retfærdiggørelsen* af teorien, hos Kristensen og Rindung med fokus på *konventioner* for omgang med og især fremstilling af teorien, mens det i de to aktuelle systemer fra Systime og Gyldendal i langt højere grad fokuseres på *færdigheder* i omgang med teori.

Hvis man antager at et lærebogssystems første kapitel har en særlig dagsordensættende rolle i forhold til resten af systemet, så viser analysen af de fire første kapitler både hvad der er den fælles kerne - at matematik i høj grad bygger på *begreber* - samt hvad der kan udgøre den grundlæggende forskel på fagidentiteter, som i øvrigt har en meget markant teori-orientering til fælles.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	16%	0%	**36%**	16%	**28%**	4%	0%	0%
Kristensen og Rindung	1%	0%	11%	5%	**39%**	**44%**	0%	0%
Systime	**32%**	9%	4%	15%	**23%**	15%	0%	2%
Gyldendal	**60%**	0%	0%	17%	**20%**	3%	0%	0%

Tabel 6.42) Sammenstilling af de samlede vægtede fordelinger af ”stor tyngde” i ”første kapitel”.

Sammenstiller man de analyserede kapitler inden for emnet *trigonometri*, fremkommer billedet vist i tabel 6.43. Her ses at de to historiske lærebogssystemer har et stort fokus på *teoriforståelsen* til fælles, mens dette tyngdepunkt fylder mindre i de to aktuelle systemer. Her er til gengæld tyngde uden for teoridimensionen - især i *meta*-dimensionen. Der sker altså en bevægelse fra historisk at have fokus på selve teorien, til et aktuelt fokus på at sætte teorien ind i en bredere sammenhæng.

Derudover sker der i overgangen fra Andersen og Mogensen til Kristensen og Rindung en bevægelse fra fokus på *retfærdiggørelse* af teorien til i højere grad at have fokus på at optræne mere konkrete *færdigheder* i anvendelsen af denne. Dette skifte videreføres i de to aktuelle lærebogssystemer, hvor teoriforståelsen som sagt nedtones. Det kan endvidere bemærkes at *begrebskendskab* ikke fylder ret meget for dette emne i noget lærebogssystem. Måske fordi der på tværs af tid er en forventning om at dette eksisterer allerede ved gymnasiets begyndelse, samt at trigonometrien i højere grad bygger på en eksisterende intuition.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	15%	0%	**37%**	**39%**	8%	0%	0%	0%
Kristensen og Rindung	**52%**	5%	4%	**39%**	0%	0%	0%	0%
Systime	**52%**	7%	10%	10%	10%	1%	0%	10%
Gyldendal	**44%**	0%	10%	13%	10%	0%	7%	17%

Tabel 6.43) Sammenstilling af de samlede vægtede fordelinger af "stor tyngde" i "første kapitel om trigonometri".

Ser man i stedet på sammenstillingen af de fire analyserede kapitler om *funktioner* i tabel 6.44 ses det, at teoriforståelsen også her får en vis tyngde i de to historiske lærebogssystemer. Andersen og Mogensen har dog - lidt atypisk for systemet - størst tyngde i *færdighedstræning*. For de tre øvrige systemer gælder, at der lægges en del tyngde i begrebskendeskab.

De to aktuelle systemer synes dog at vægte forskelligt. Gyldendal har størst fokus på *begrebskendskab* og begrænset på færdighedstræning, mens det er lige omvendt hos Systime. Endvidere har Gyldendal modsat de andre tre systemer en del tyngde udenfor *teori*-dimensionen, særligt i *anvendelses*-dimensionen.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	**39%**	2%	14%	**26%**	16%	0%	3%	1%
Kristensen og Rindung	10%	2%	10%	**27%**	**34%**	17%	0%	0%
Systime	**51%**	3%	0%	8%	**28%**	7%	1%	2%
Gyldendal	**22%**	3%	2%	9%	**42%**	2%	14%	5%

Tabel 6.44) Sammenstilling af de samlede vægtede fordelinger af "stor tyngde" i " første kapitel om funktioner".

Endeligt er de analyserede kapitler om *differentialregning* sammenstillet i tabel 6.45. Her ses hos de to historiske lærebogssystemer især at have stor tyngde i *teoriforståelse*, samt for Andersen og Mogensens vedkommende tillige i *ræsonneret retfærdiggørelse*. De to aktuelle systemer har mest tyngde i færdighedstræning, samt tillige en vis tyngde i begrebskendskab og for Systime-systemets vedkommende også i teoriforståelse. Ingen af systemerne har i nævneværdig grad stor tyngde uden for teori-dimensionen.

Stor tyngde, vægtet	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	23%	0%	**31%**	**32%**	13%	0%	0%	0%
Kristensen og Rindung	**25%**	3%	11%	**40%**	19%	1%	2%	0%
Systime	**38%**	0%	0%	**27%**	**27%**	6%	0%	1%
Gyldendal	**40%**	6%	7%	17%	**29%**	1%	0%	0%

Tabel 6.45) Sammenstilling af samlede vægtede fordelinger af "stor tyngde" i " første kapitel om differentialregning".

Det første man kan se af de fire sammenstillinger af enkeltkapitler er, at der også for hvert kapitel synes at tegne sig et billede af at nogle tyngdepunkter træder frem. At der kan ses rimeligt klare forskelle mellem de forskellige systemer - især mellem de historiske og de aktuelle. Denne observation bakker altså op om at begrebsapparatet omkring fagidentiteter faktisk er i stand til at se nogle klare og meningsfulde forskelle mellem forskellige lærebogssystemer, både for systemerne som helhed og for dele af disse.

Det andet man kan seaf den analyserede fagidentitet for de forskellige kapiteltyper er, at det enkelte system ikke nødvendigvis er homogent. For de to aktuelle systemer kan ses at der på tværs af de analyserede kapitler er en tendens til mange identitetsbidrag med størst tyngde i *færdighedstræning*. Dette synes altså at være et sikkert karakteristikum ved disse to systemer. Det synes også at være tendensen, at *begrebskendskab* træder frem som det "næsttungeste".

For de to historiske systemer synes der at være en tilbøjelighed til at *teoriforståelse* har tyngde og for Andersen og Mogensen tillige også *ræsonneret retfærdiggørelse*. For Kristensen og Rindung er der noget større variation i hvad der ellers har tyngde, så her fremstår fagidentiteten en smule mere uklar. Hertil hører bl.a. at det tidligere omtalte fokus på *konventionskendskab* er meget afgrænset til systemets første kapitel.

Analysen kan altså bruges til to typer foreløbige konklusioner. Den første omhandler rækkevidden af begreber og metode. Her synes der at komme klare svar når et eller flere kapitler analyseres, men variationen fra kapitel til kapitel kan godt være så stor, at der må tages visse forbehold. Overordnet set synes analysen at bekræfte brugbarheden af begreber og metode.

Den anden omhandler det analyserede. Her ses det ældste system Andersen og Mogensen at have et stærkt fokus på forståelse af og begrundelse for teorien. I det lidt nyere bevares fokus på *teoriforståelse*, mens retfærdiggørelsen af teorien nedtones til fordel for *færdighedstræning*, *begrebskendskab* og *konventionskendskab*. Og endeligt i de to aktuelle systemer synes tyngden at være forskudt markant henimod *færdighedstræning* og i tillæg hertil mod *begrebskendskab*.

7 Analyse: Fagidentiteter hos undervisere

I dette kapitel vil analysen blive overført til *underviser*-domænet. Som det blev diskuteret i afsnit 4.4 er dette et vanskeligere tilgængeligt domæne, end de to foregående, fordi et menneske ikke kan læses på samme måde som en tekst. Den væsentligste metode til at forsøge at læse fagidentiteten hos det valgte udsnit af matematiklærere har således været at spørge dem via et spørgeskema. Spørgsmålene er dels forsøgt stillet direkte, dels indirekte i form af ”lakmus”-prøver. I dette kapitel vil fokus ligge på de direkte stillede spørgsmål, mens der i det næste vil være fokus på en analyse af ”lakmus”-prøverne.

De statistiske test der indgår i kapitlet er alle ensidige binomialtest med et signifikansniveau på 5%.

7.1 Deklareret identitet

Respondenterne blev bedt om at tilslutte sig én af fire formulerede fagidentiteter. De fire formuleringer kaldtes A, B, C og D og ses på næste side. Der er naturligvis tale om forholdsvist skarpt optrukne karikeringer, for at fremtvinge en stillingtagen. Identitet A er lavet som et forsøg på at sidestille *teori*- og *anvendelses*-dimensionerne, mens der for identitet B og C er forsøgt at lægge hovedvægten i hhv. anvendelses og teoridimensionen.

Formulering D er af mere uklar art, men er taget med for at give en valgmulighed for de som helst vil svare det per erfaring almindelige svar: ”matematik er et sprog”. Dette svar kan der lægges mange betydninger i, men skal man tage det på ordet er et sprog en kompetence til at kunne kommunikere om fænomener, uden at der i selve sproget ligger en forhåndsbeslutning om hvad der bør kommunikeres om. Her adskiller identitet D sig fra de tre andre, som i højere grad har vægt på *hvad* der kan og bør tales om.

Respondentpopulationen har samlet set svaret på følgende vis, i det tabellen til venstre viser svar fra alle respondenter der har besvaret spørgsmålet, mens tabellen til højre alene viser svar fra de respondenter der gennemførte hele spørgeskemaet:

Identitet	A	B	C	D	Sum
Antal	112	25	22	40	199
Andel	56%	13%	11%	20%	100%

Identitet	A	B	C	D	Sum
Antal	71	19	16	29	135
Andel	53%	14%	12%	21%	100%

Tabel 7.1) Svar på valg mellem fire fagidentiteter (alle respondenter t.v., kun gennemførende respondenter t.h.)

Det ses at fordelingen ikke synes afhængig af, at en del respondenter står af undervejs. Derudover ses størst tilslutning til identitet A fra lidt over halvdelen af respondenterne, mens D er næststørst og de to meget tonede fagidentiteter kun nyder opbakning fra lidt over 10% hver. Det tyder overordnet set på, at der i underviserkredsen er en *udtalt* tilslutning til det synspunkt, at matematiks fagidentitet er en balancegang mellem teori og anvendelse. Der er i formuleringerne ikke tilstræbt en skelnen mellem forskellige afvejninger af *meta*-dimensionen, som indgår i alle fire.

De fire formulerede fagidentiteter i spørgeskemaundersøgelsen

Spørgsmål: *Lærerplanerne for Matematik A, B og C indledes alle med det samme afsnit om fagets 'identitet'. Hvis du skulle deltage i en afstemning om formuleringen af dette afsnit, hvor nedenstående fire formuleringer var valgmulighederne, hvilken ville du så umiddelbart støtte ud fra dit eget syn på faget?*

Formulering A

I matematik udvikles og anvendes viden om generelle mønstre og strukturer.

Matematik er således på den ene side en selvstændig teori, som med udgangspunkt i abstraktion og logik opbygger begreber og viden om generelle strukturer, i form af definitioner, sætninger og beviser.

På den anden side er matematik et værktøj til modellering af fænomener i andre fag, i industri og erhverv, i politik og økonomi, i planlægning og i dagligdagen. Med modellering kan matematik løse problemer og skabe indsigter, som ellers havde været svært tilgængelige.

Teori og anvendelse er to ligeværdige sider af faget og indgår ligeværdigt i matematikkens praksis som hinandens forudsætninger. Matematikkens udvikling mellem teori og anvendelse har fulgt mennesket, siden de første civilisationer.

Formulering B

Matematik er et redskab til at formulere og behandle problemer af kvantitativ karakter. Matematik henter således sin legitimitet i en stor mangfoldighed af anvendelsesmuligheder, der spænder fra modellering og beregninger i andre fag og videnskabsgrene til løsning af konkrete problemer i teknologi, erhverv og hverdag.

Matematikkens brede tilstedeværelse gør den samtidig til en vigtig kultur- og historieskabende faktor, som har sat sit afgørende præg på den moderne civilisation.

Det matematiske redskab er baseret på en abstrakt matematisk teori, som er opbygget logisk af definitioner, sætninger og beviser. Afhængigt af sammenhængen, kan kendskabet til denne teori spille en stor eller lille rolle for muligheden af at udfolde matematisk aktivitet.

Formulering C

Matematik er studiet af de mest generelle strukturer og mønstre, specielt tal og form.

Matematik er således en selvstændig teori for disse generelle fænomener, der består af begreber, definitioner, sætninger, beviser, mv. formuleret i matematikkens særlige symbolsprog.

Matematikeren arbejder med at udvikle denne teori gennem abstraktion, logisk tænkning, kreativitet, præcision, mv.

Udenfor matematikfaget finder den matematiske teori en bred vifte af anvendelser i eksempelvis naturvidenskab, teknologi og økonomi. Anvendelsen af matematik har fulgt mennesket fra de tidligste civilisationer.

Formulering D

Matematik er et sprog, som gør det muligt for mennesket at begribe en bred vifte af fænomener, dels i naturen og samfundet, men også af mere generel abstrakt karakter. Matematik baserer sig på logisk tænkning og udvikler i sin praksis kendskabet til generelle abstrakte mønstre.

Matematik finder som sprog en bred anvendelse dels indenfor sit eget domæne, dels indenfor erhverv, videnskab og dagligdag. Faget spiller særligt en rolle i naturvidenskaben. Faget har fra de tidligste civilisationer udviklet sig i samspil med kultur, samfund og videnskab.

I gymnasiet er matematik først og fremmest et færdighedsfag, hvor eleverne skal lære at omgås sproget samt dets symboler, tankegange og begreber.

Der viser sig ikke at være en signifikant sammenhæng mellem respondentens køn, alder eller hvilket universitet vedkommende er uddannet fra og så valg af fagidentitet. Blandt lærere med fysik som andet fag har 22% valgt identitet B. Og blandt lærere med humanistisk andet fag har 23% valgt identitet C og 37% identitet D. Disse tre andele er alle signifikante overrepræsentationer. Der synes altså at være konturer af en svag sammenhæng mellem lærerens øvrige fag og valg af identitet.

Spørg man respondenterne i hvilket omfang de faktisk finder den viste formulering brugbar, svarer de følgende (sorteret efter identitetsvalg, dels samlet set):

Vurdering / **Identitetsvalg**	**A**		**B**		**C**		**D**		**Alle**	
Kan fint bruges uden ændringer	37	34%	7	28%	3	14%	13	33%	60	31%
Kan fint bruges med justeringer	59	54%	15	60%	9	43%	23	58%	106	54%
Acceptabel, men bør formuleres anderledes	14	13%	1	4%	3	14%	1	3%	19	10%
Ikke brugbar, men den mindst ringe af mulighederne	0	0%	2	8%	6	29%	3	8%	11	6%

Tabel 7.2) Respondenternes vurdering af den givne formulering sorteret efter identitetsvalg.

De respondenter som har valgt identitet A, B og D er altså overordnet set tilfredse med formuleringen, mens de som har valgt identitet C i højere grad fremstår kritiske overfor formuleringen (der er dog tale om rimeligt små tal). Med denne baggrundsviden vil der i det følgende blive analyseret lidt dybere på de respondenter der har tilsluttet sig de forskellige fagidentiteter. Hver respondent er således blevet bedt om at afkrydse et antal begrundelser for deres valg, som varierer alt efter valget.

7.1.1 Fagidentitet A – teori og anvendelse er ligeværdige sider

Typisk angiver en respondent 1-2 begrundelser. De seks begrundelser som respondenter der havde tilsluttet sig identitet A kunne vælge imellem ses her:

	Begrundelser for valg af identitet A (N = 110)	**#**	**%**
A1	Det teoretiske og det anvendte er lige vigtige for faget	84	76%
A2	Balancen mellem teori og anvendelse er vigtig, i dag fylder teori for meget	2	2%
A3	Balancen mellem teori og anvendelse er vigtig, i dag fylder anvendelse for meget	24	22%
A4	Den konkrete beskrivelse af matematikkens teori er god.	40	36%
A5	Den konkrete beskrivelse af matematikkens anvendelse er god	30	27%
A6	Enig i udsagnet om, at "matematik udvikler sig mellem teori og praksis".	53	48%
A7	Andre grunde (angiv gerne nærmere i kommentarfeltet)	1	1%

Tabel 7.3) Respondenters tilslutning til begrundelser for valg af identitet A.

Som det væsentligste kan man se at ca. tre-fjerdedele af respondenterne tilslutter sig begrundelse A1 om, at det teoretiske og det anvendte er *lige vigtige* for faget. Dertil følger at omtrent halvdelen vægter A6 om den rolle dualiteten mellem teori og praksis spiller (heraf har 42 angivet både A1 og A6). En mindre andel angiver den konkrete formulering som begrundelse (25 angiver både svarene A4 og A5). Der er også et lille udsnit der har angivet at balancen er vigtig, men ikke til stede i dag. Af disse mener kun to respondenter (A2) at teorien fylder for meget, mens 24 angiver at anvendelse fylder for meget.

Ser man på de ”frie” kommentarer som respondenterne har kunnet angive, ytres blandt andet det synspunkt, at den ønskede identitet ikke nødvendigvis afspejler respondentens synspunkt, men også en vurdering af hvad der er realistisk i forhold til elevgruppen:

> »Matematik som videnskabsfag kommer bedst til udtryk i C, men det realistiske niveau i gymnasiet er nok en blanding af indsigt i matematikkens natur og anvendelser af matematik, og det rammes i A.« (Respondent #116).

Der er også eksempler på at respondenter ikke ønsker at acceptere den præmis der hedder, at en identitetsbeskrivelse gælder hele fag og ikke det enkelte niveau, eller som ikke finder det vigtigt:

> »De indledende erklæringer betyder ikke særligt meget for mig. I dagligdagen er det andre ting, der tæller« (Respondent #24)

> »Forholdet mellem teori og anvendelse skal varierer for de enkelte niveauer. På C - niveauet skal der selvfølgelig være en del teori, men vægten skal lægges på anvendelserne. Jeg får meget tit spørgsmålet, hvad skal jeg bruge dette til? For nogle emner er det let at lave en parallel til deres hverdag, mens jeg i andre sammenhænge må henvise til evnen til at se strukturer og øget abstraktionsniveau, som fordele ved matematikundervisningen.« (Respondent #82)

Af sidstnævnte citat kan man se at respondenten nogle gange har problemer med balancen mellem teori og anvendelse og må ty til en mere kompetence-orienteret forståelse af ”anvendelse”, men ikke desto mindre synes at vægte det anvendte. Endelig er der også de respondenter som dokumenterer at metoden ikke er fuldstændig præcis, f.eks. med udsagn som »Kunne også have valgt C« (Respondent #183). Respondenten har endvidere angivet begrundelse A3 og sender dermed et signal om at det teoretiske er vigtigt og at balancen i hvert fald mangler.

I et pilot-interview reflekterede interviewpersonen over sit valg af mulighed A:

> »…det er betonet at det er to ligeværdige sider, <u>det med at matematikken har selvstændig gyldighed</u>… altså… at det i sig selv har værdi og skal tegne fagets identitet, hvis man kan bruge det ord. Og på den anden side <u>selvfølgelig er det også et værktøj</u> som kommer til gavn andre steder, i andre fag, som ikke nødvendigvis bygger på matematisk logik, men kan bruge de resultater som kommer ud af matematik. Og det synes jeg egentlig… begge dele hører med, fordi jeg synes… i de senere år har man måske betonet det lidt for meget, især efter gymnasiereformen, at matematik er… er et redskabsfag for andre fag.« (Interviewperson L2 [min understregning, kbj]).

Også for denne underviser synes det på den ene side set at være vigtigt med en balance mellem de to ting, på den anden side synes teoridimensionen måske alligevel at være med en vis slagside mod den teoretiske side. Her symboliseret ved forskellen i vægtningen mellem ”at have selvstændig gyldighed” og ”også at være et værktøj”. I forlængelse heraf fremsætter også denne underviser det synspunkt, at balancen med gymnasiereformen af 2005 tippede for meget til anvendt side.

Om fagidentitet A kan man altså sige at retorikken om balance mellem teori og anvendelse vækker positive følelser hos en hel del respondenter. Der kan dog rejses tvivl om hvor vidt ord som ”ligeværdige” og ”lige vigtige” faktisk beskriver synspunkterne. Der er en tilbøjelighed til at omtale de to sider sådan, at den teoretiske er primær og den anvendte sekundær, men at begge sider skal være til stede. Samtidig synes valget af A også i et vist omfang at være begrundet i en slags revanchisme mod gymnasiereformen af 2005, som menes at have tippet balancen for meget i anvendt retning.

7.1.2 Fagidentitet B – matematik er et redskab

De respondenter der havde angivet fagidentitet B blev efterfølgende bedt om at angive hvilke af fem begrundelser for at angive fagidentiteten, som gjaldt for deres valg. Resultatet blev:

	Begrundelser for valg af identitet B (N = 25)	#	%
B1	Matematik er primært relevant, fordi det kan anvendes udenfor faget selv.	12	48%
B2	Anvendelse af matematik er vigtigst, men teori har også en plads	15	60%
B3	Matematik i gymnasiet bør kun handle om anvendelse uden for faget selv.	1	4%
B4	Den konkrete beskrivelse af fagets legitimitet er god	9	36%
B5	Den konkrete beskrivelse af teoriens rolle i faget er god.	6	24%
B6	Andre grunde (angiv gerne nærmere i kommentarfeltet)	1	4%

Tabel 7.4) Respondenters tilslutning til begrundelser for valg af identitet B.

De to mest populære begrundelser blandt det begrænsede antal af respondenter der valgte identitet B, er B1 og B2. Da 8 respondenter har valgt begge begrundelser, har samlet 19 ud af 25 - dvs. ca. tre-fjerdedele – valgt en af disse (den ene som har angivet B3 hører også til de 19). De tre begrundelser B1, B2 og B3 understøtter alle det synspunkt, at anvendelses-siden er det vigtigste. Hovedparten angiver dog at teori også har en plads. Kun én støtter det synspunkt (B3) at matematik skal være fuldt fokuseret på anvendelse.

Der er afgivet forholdsvis få frie kommentarer om identitet B, men én skriver følgende:

> »Vi får - af mange grunde - et stadig stigende antal elever med en faglig svag baggrund. Navnlig for sådanne elever er en induktiv indgang afgørende - hvilket netop er fokus for min anvendelse af GeoGebra som basis for den daglige undervisning. Når eleven ret nemt har set opgaven løst i GeoGebra, så er der efterfølgende basis for at arbejde med den mere teoretiske forståelse. Denne metode og indgang til undervisningen ville jeg ikke så stringent bruge i en klasse, der fra starten har valgt A-niveau.« (Respondent #56)

Her ses altså – i stil med kommentaren fra respondent #116 til identitet A – et argument om at identiteten er valgt ud fra et pragmatisk pædagogisk synspunkt om, at anvendelser er den nemmeste vej til teori. Som en indirekte kommentar[5] til identitet B siger interviewperson L3:

> »[…] jeg er selvfølgeligt klar modstander af at man kun betragter matematik som et anvendelsesfag, fordi faget kan jo helt klart noget i sig selv.« (Interviewperson L3).

Interviewpersonen lægger her meget skarpt afstand til grundtanken i identitet B, hvilket forklarer noget om personens egen fagidentitet. Og dertil siger ordet ”selvfølgeligt” også noget om personens forventning til andres fagidentitet: Det er ikke et synspunkt personen forventer at kunne finde hos en matematiklærer.

Identitet B kan altså på mange måder opfattes som sjælden og radikal. Samtidig opfattes dens kerne – matematik som redskab – af en del aktører som en nødvendig reaktion på det faglige niveau hos eleverne, snarere end som deres egen fagidentitet. Der kommer altså en del konkurrerende dagsordener i spil her, hvoraf identitet kun er én af dem.

---

[5] Ved pilot-interviewene var identitet B endnu ikke formuleret og i stedet var der på den plads den gældende formulering fra læreplanerne. Kommentaren er egentlig til identitet A, men bringes her som diskussion af identitet B.

7.1.3 Fagidentitet C – matematik er en selvstændig teori

De respondenter der angav fagidentitet C blev efterfølgende bedt om at angive hvilke af fem begrundelser de mente passede til deres valg af fagidentitet:

	Begrundelser for valg af identitet C (N = 22)	#	%
C1	Matematik er et selvstændigt fag, som det er vigtigt at værne om	17	81%
C2	Anvendelse af matematik er ikke noget der hører hjemme i matematikundervisningen	1	5%
C3	Anvendelse af matematik bør kun indgå som pædagogiske illustrationer	2	10%
C4	Anvendelse af matematik fylder for meget i dag.	9	43%
C5	Den konkrete beskrivelse af teoriens rolle i faget er god	14	67%
C6	Andre grunde (angiv gerne nærmere i kommentarfeltet)	1	5%

Tabel 7.4) Respondenters tilslutning til begrundelser for valg af identitet C.

Det ses her at en blødere argumentation som C1 har vundet opbakning fra langt de fleste der har peget på denne identitet. Udsagnet er blødere fordi det ikke tager skarpt stilling mellem de to dimensioner, men snarere udtrykker en emotionel og defensiv begrundelse om at faget mister sin identitet, fordi der sker forskydninger fra *teori*-dimensionen til *anvendelses*-dimensionen. En tolkning der delvist bakkes op af at 7 af de 17 respondenter der valgte C1, også valgte det åbent defensive udsagn C4.

De mere hårde udsagn som C2 og C3, hvor der netop udtrykkes en mere eller mindre klar afstandtagen til *anvendelses*-dimensionen, har kun meget lille opbakning. Der synes altså ikke på den baggrund at være grundlag for at konkludere, at der findes en signifikant delmængde af matematiklærerne som opfatter *anvendelses*-dimensionen som et fremmedelement i matematiks fagidentitet.

Endeligt ses også at to ud af tre synes at bakke op om forklaring C5, der i højere grad fokuserer på at man kan lide måden teorien beskrives på, end på de identitetsmæssige spørgsmål hvor identitet C skal adskille sig fra de øvrige. Følgende to frie kommentarer er givet af respondenter, som netop har angivet kombinationen af C1 og C5:

> »Anvendelser er skam vigtige...« (Respondent #40)
>
> »Jeg synes der skal formuleringer omkring anvendelse, men jeg kan godt lide vægten på matematik som et teoretisk fag.« (Respondent #38)

De to respondent-udsagn synes at bakke op om, at selv de undervisere der tilslutter sig denne identitet, mener at *anvendelses*-dimensionen har tyngde i deres fagidentitet. Men særligt det sidste udsagn indikerer samtidigt, at der netop er tale om en rangordning af de to dimensioner, hvor den ene opfattes som vigtigere end den anden. Dette synspunkt udfoldes af interviewperson L1, der som begrundelse for at tilslutte sig identitet C siger:

> »Jeg begrunder det med at flere af de andre har anvendelse som en ligevægtig del med den abstrakte tænkning og den abstrakte behandling af fænomener. Og jeg synes måske at anvendelse er en bonus som kommer på, som er… som i virkeligheden ikke hører til matematikkens identitet. Det er en tilfældig bonus som retfærdiggør at man bruger tid på matematikken og penge på det og at man underviser i det, men det er ikke det der er matematikkens kerneområde, og der synes jeg måske at C'eren er den af de fire her der kommer tættest på.« (Interviewperson L1)

L1 er måske en af dem der mest eksplicit laver en distinktion mellem ”ren” og ”anvendt” matematik og udtrykker en fagidentitet hvor det første er overordnet det andet. Endda så meget at det anvendte principielt set er udenfor. L1’s begrundelse for at vælge identitet C flugter således med intentionen med at formulere den, nemlig at fange dem som mener at matematikkens anvendelse må udfolde sig andre steder end i faget matematik. Dette synspunkt er dog kun meget lidt udbredt blandt respondenterne i spørgeskemaundersøgelsen, hvor kun 3 personer har angivet begrundelserne C2 og C3, der begge læner sig op af L1’s udsagn.

7.1.4 Fagidentitet D - matematik som sprog

Respondenter der angav fagidentitet D blev efterfølgende bedt om at angive hvilke af følgende begrundelser for valget af D, som de personligt kunne tilslutte sig:

	Begrundelser for valg af identitet D (N = 40)	#	%
D1	Matematik er et sprog, som man skal lære at skrive og tale.	32	80%
D2	Det er ikke vigtigt om indholdet er teoretisk eller anvendt.	6	15%
D3	Formuleringen er mindre firkantet end de øvrige	11	28%
D4	Den konkrete beskrivelse af faget er god.	16	40%
D5	Den konkrete beskrivelse af fagets anvendelse er god	13	33%
D6	Matematik i gymnasiet er først og fremmest et færdighedsfag	21	53%
D7	Andre grunde (angiv gerne nærmere i kommentarfeltet)	1	3%

Tabel 7.5) Respondenters tilslutning til begrundelser for valg af identitet D.

Det ses her at langt hovedparten af de respondenter som tilslutter sig begrundelse D angiver den ret ukonkrete begrundelse D1, som implicit rummer pointen om matematik som et sprog, der ikke tager stilling til hvad der tales om. Den mere eksplicitte formulering af dette i begrundelse D2, har imidlertid ikke vunder specielt stor tilslutning.

Det argument med næststørst tilslutning er D6, hvor ”matematik er et sprog” orienteres mere ind i skoletænkningen som ”matematik er et færdighedsfag”. Hvor ”sprog” er et helhedsorienteret og overordnet synspunkt, synes færdigheder at være mere pragmatisk og fokuseret på konkrete elementer. D1 og D6 har altså det til fælles at de vægter genstanden mindre end handlingen, men med henholdsvis et overordnet og et konkret fokus. Det er dog absolut ikke nogen entydig distinktion, i det 17 respondenter har angivet både D1 og D6.

Argumenterne D3, D4 og D5 handler mere om nogle mere sproglige argumenter for at have peget på denne formulering. 14 respondenter har angivet én af disse, 10 har angivet to af dem og 2 har angivet alle tre. Det kan altså se ud som om at det kun i mindre grad er selve formuleringen der har trukket folk til, men mere snakken om ”sprog” og ”færdigheder”. En af de 14 uddyber sit valg:

> »Jeg bryder mig ikke om sprog-metaforen, som jeg finder tyndbenet og fortærsket. Mat. baseres *bla* på logisk tænkning, men i høj grad også på mere praktiske færdigheder.« (Respondent #113).

Respondent #113 har angivet argumenterne D4, D5 og D6. Der er her tale om en der har tilvalgt identitet D, uden at støtte den metafor der er bærende for identiteten. I stedet har respondenten haft fokus dels på beskrivelsen af teori og anvendelse, dels på det konkrete færdighedsbegreb. En anden respondent har angivet argument D1 og uddybet sin besvarelse:

> »Formuleringen lægger vægt på, at matematik er et særligt fag med egen identitet og eget formål og ikke kun summen af anvendelserne, men med en realistisk forestilling om, hvad man kan opnå med og bør forlange af gymnasieelever (i 2011).« (Respondent #42)

Respondenten ser altså ”sprog” som noget der giver faget en uafhængig identitet, frem for at være bundet op på et ensidigt fokus på anvendelser. Om der heri ligger en implicit orientering mod teori er lidt mere uklart. Respondenten angiver dog den mere pragmatisk pædagogiske begrundelse om en ”realistisk forestilling om hvad man kan forlange”. Her refereres formentlig til identitetsbeskrivelsens sidste linjer, som netop forsøger ikke at indfange det mere teoretiske, men nøjes med at nævne ”symboler, tankegange og begreber”.

I et pilot-interview sagde en respondent følgende om identitet D:

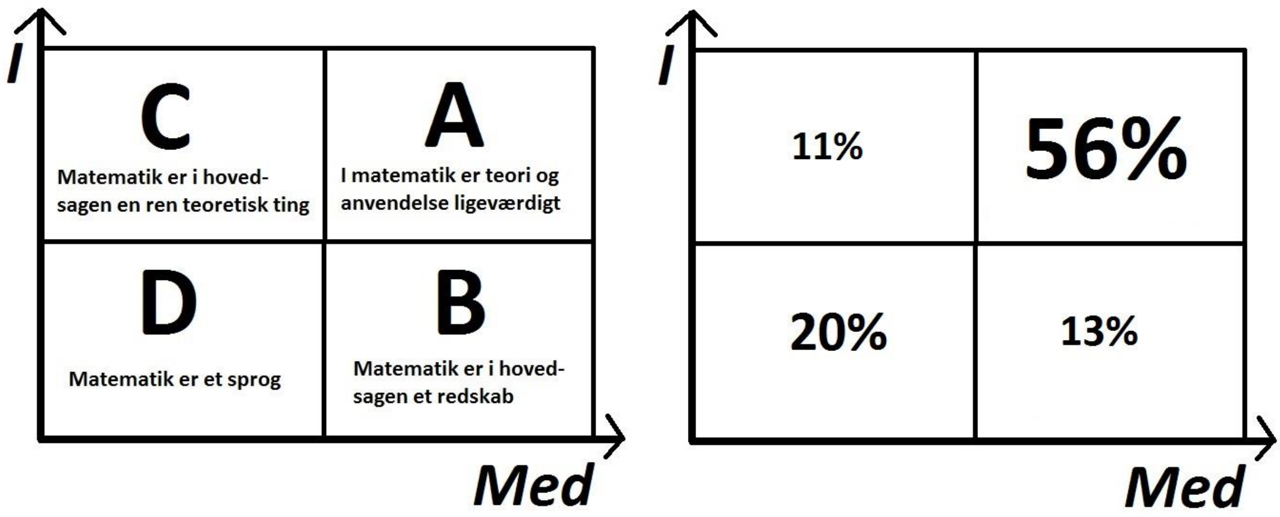
> »D er… er en mere blød formulering der for mig at se fokuserer på anvendelserne. Der står godt nok at matematik baserer sig på logisk tænkning og udvikler i sin praksis kendskabet til generelle strukturer og mønstre… den er sådan mere induktiv måske… man har nogle eksempler, nogle cases, og prøver at se hvad er der af generelle mønstre og så kan der komme matematik ind sådan lidt af bagvejen på den måde. Og der tror jeg, det er… der vil man nok miste blikket, eller der vil være lang vej frem til og erkende matematikken som den der logiske struktur der har… der kan eksistere for sig selv, kan man sige.« (Interviewperson L2)

Her synes identitetsbeskrivelsen klart at blive afvist på dens manglende fokus på den mere teoretiske side af faget. L2 tilsluttede sig i stedet identitet A, hvor teori tydeligt spiller en rolle, om end ligeværdigt med anvendelse. Så L2 synes at vende sig væk fra identitet D på grund af nedtoningen af teorien.

7.1.5 Sammenfatning af deklareret identitet

Hvis man skal prøve at sammenfatte fagidentiteterne på domænet ud fra deklarationerne fra respondenterne, står to ting klart. For det første at man ikke kan lave en fuld kortlægning ud fra det tidligere opstillede begrebsapparat, men at man må holde sig til en overordnet opdeling i dimensionerne teori og anvendelse, med en grov graduering af hver dimension. Og for det andet, at fortolkningen af svarene rummer betydelige usikkerheder, fordi der er tale om en proces med mulighed for mange forskelligrettede tolkninger. Analysen i de foregående synes dog at vise, at der med dette sidste forbehold godt kan tegnes at billede i grove træk af hvordan fagidentiteten på domænet ser ud.

I første omgang skal billedet altså indeholde de to dimensioner *i*-dimensionen og *med*-dimensionen. De fire identiteter placerer sig i dette rum som vist på venstre side af figur 7.1. Fagidentitet A placerer sig der hvor de to dimensioner begge vægtes højt, fagidentitet B der hvor *med*-dimensionen vægtes højt, mens teoridimensionen vægtes lavt, fagidentitet C på den omvendte position og endelig fagidentitet D der hvor det ikke er afvejningen af de to dimensioner der synes afgørende, men snarere noget helt tredje. Lader man underviserne fordele sig mellem de fire positioner, giver det altså en fordeling af deklareret fagidentitet på underviserdomænet som vist til højre.



Figur 7.1) Til venstre ses de fire identiteters placering på domænet, mens det til højre vises hvordan de fordeler sig

Dette er imidlertid en ganske grovkornet analyse. Når man ser på begrundelser og kommentarer til hver af de fire identiteter, synes der at være nogle for hvem den tilsluttede fagidentitet er mere et pragmatisk valg ud fra sammenhængen, end et principielt syn på faget. Udspændingen på figur 7.1 repræsenterer egentlig kun den principielle side.

Den pragmatiske side af identitet A er det synspunkt, at de to dimensioner vægtes ud fra en *pragmatisk balance* der skal få undervisningen til at køre. Den pragmatiske side af identitet B er det synspunkt, at matematik mest skal være et redskab, fordi det er det der pædagogisk kan lade sig gøre og er motiverende for overhovedet at beskæftige sig med stoffet. Den pragmatiske side af identitet C er det synspunkt, at teori er vigtigst, men anvendelse acceptabelt eller nødvendigt til at understøtte eller motivere teorien. Endelig kan fagidentitet D opdeles i den principielle variant ”matematik er et sprog” overfor den pragmatiske ”gymnasiematematik er færdigheder”.

Dermed kan hvert af de fire rum på figur 7.1 opdeles i to som på figur 7.2, således at den yderste del repræsenterer et principielt fagsyn, mens den inderste repræsenterer et pragmatisk. Den valgte opdeling symboliserer således en forventning om, at en underviser med et fagsyn i den ”pragmatiske kerne” har nemt ved at flytte sig omkring i kernen, mens en mere principiel fagidentitet er sværere at rykke på. Det er dog vigtigt at understrege, at dette også er en ret grovkornet model.

For at kunne opdele respondenterne mellem den principielle og den pragmatiske side, må der træffes et valg om hvordan argumenterne indgår i denne placering. Dette valg er yderst vanskeligt og da det sker som en efterrationalisering, er spørgeskemaets spørgsmål ikke designet til at lave en sådan opdeling. Men hvis man nu alligevel skal gøre forsøget ud fra de uddybende argumenter som respondenterne inden for de forskellige deklarerede fagidentiteter har tilsluttet sig, så kunne et opdelingskriterium være det der er vist i følgende tabel. I tabellen betyder ” A1 (÷A2/A3)” at man har svaret A1, men hverken A2 eller A3. ”A2/A3 (+A1)” betyder at man har svaret enten A2 og/eller A3, samt evt. også A1.

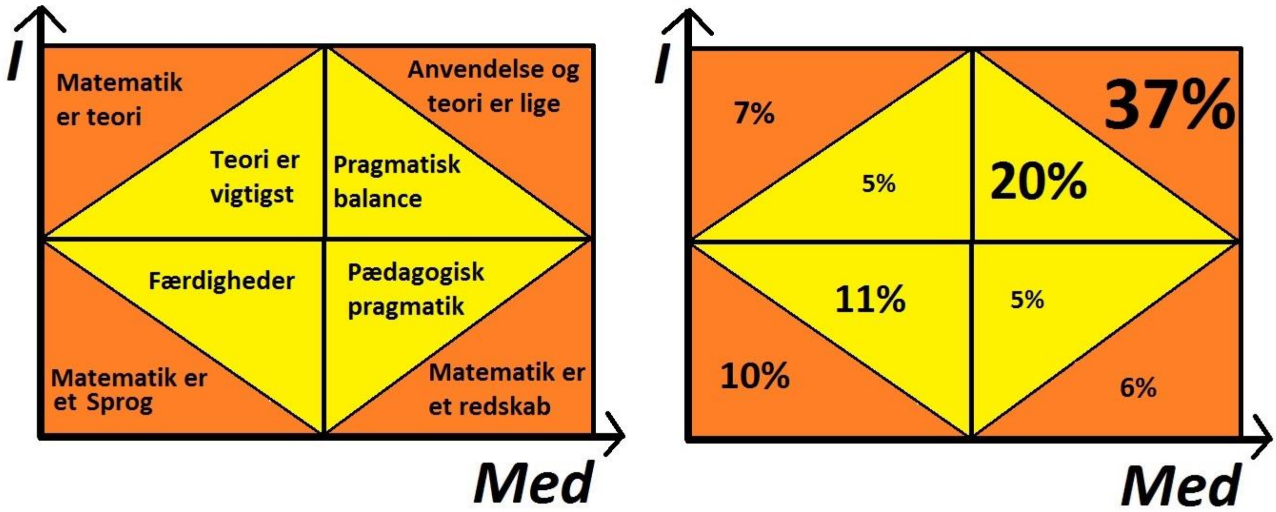
Identitet	Principiel side	Pragmatisk side
A	”A1 (÷A2/A3)” [73]	”A2/A3 (+A1)” [26], øvrige [13]
B	”B1/B2 (÷B3/B4/B5) [11]	”B3/B4/B5 (+B1/B2)” [13], øvrige [1]
C	”C1/C2 (÷C3/C4)” [10], øvrige [3]	”C4 (+C1/C3)” [9]
D	”D1/D2” (÷D6) [16], øvrige [3]	”D6” (+D1/D2) [21]

Tabel 7.6) Kriterier for inddeling af respondenter i de fire opdelte identitets-rum. Antal opfyldende kriterium i parentes.

Med de angivne kriterier giver det anledning til den fordeling som er vist til højre på figur 7.2. Denne er som sagt med meget store forbehold og det at lave den tjener måske mere til at vise hvordan man kunne tænke sig at inddele undervisergruppen snarere end hvordan den faktisk er inddelt. Men hvis vi skal tage tallene som de står, så viser den at ca. 40% af gymnasieskolens matematiklærere befinder sig i den pragmatiske kerne, mens 60% besidder en mere principiel fagidentitet.

En sådan opdeling kan blandt andet tjene til at forklare nogle af de identitetsbårne stridigheder der kan eksistere inden for gymnasiefaget matematisk, som typisk vil komme til udtryk mellem de principielle synspunkter, som har karakter af uenigheder om ”hvad matematik er”, mens man inden for den pragmatiske kerne snarere vil være tilbøjelig til at have konsensus om et mål om ”læring”, mens uenighederne går på ”hvad der virker”.

Én implikation af denne opdeling kan være, at forandringsstrategier indenfor faget på underviserdomænet må vælge mellem et fokus på at flytte folk det samme sted hen i periferien overfor et fokus på at få flyttet undervisere fra periferien ind i den pragmatiske kerne, hvor de har nemmere ved at flytte omkring.



Figur 7.2) I-Med-identitetsrummet opdelt i en pragmatisk kerne og en principiel periferi.

7.2 Fagidentitet og syn på fagets udvikling og tilstand

For at få et indtryk af om den selvdeklarerede fagidentitet rent faktisk indikerer noget om respondentens syn på mere konkrete forhold omkring matematik, stilledes respondenterne en række mere konkrete spørgsmål om holdninger og til vurdering af gymnasiematematikfaget.

7.2.1 Syn på udviklingen siden 2005-reformen

I første omgang spurgtes til om udviklingen i gymnasieskolens matematikfag siden seneste reform havde været ønskelig. Respondenternes svar er sammenfattet i tabel 7.7. Det skal her bemærkes at 10 respondenter havde angivet som fri kommentar, at de ikke kunne vurdere disse. Disse 10 respondenter er sorteret fra i opgørelsen, selvom de var tvunget til at svare.

Synes du at gymnasieskolens matematikfags udvikling siden 2005 har været ønskelig?					
Erklæret fagidentitet	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Meget eller Delvist Uønsket	58%	55%	37%	62%	78%
Samme	6%	6%	5%	15%	4%
Meget eller Delvist Ønsket	36%	39%	58%	23%	19%
N	*125*	*66*	*19*	*13*	*27*

Tabel 7.7) Fordeling af svar vedr. syn på fagets udvikling siden reformen i 2005, fordelt på deklareret fagidentitet.

For populationen som helhed kan siges, at der først og fremmest er enighed om, at faget har udviklet sig til noget andet. Synspunktet at faget er det samme som før, har meget lille tilslutning. Der synes at være signifikant ($p = 0{,}046$) størst tilslutning til det synspunkt, at udviklingen har været *uønsket*, hvilket samlet ca. 58% af respondenterne har svaret (fordelt på ca. 19% ”meget uønsket” og 39% ”delvist uønsket), mens 36% kalder udviklingen *ønsket* (fordelt på 8% ”meget ønsket” og 28% ”delvist ønsket”).

Den overordnede fordeling genfindes inden for respondenter tilsluttet fagidentitet A (ikke overraskende, da denne fylder over halvdelen af populationen). For gruppen der har tilsluttet sig fagidentitet C synes lidt flere at kalde udviklingen uønskede (ikke signifikant - $p = 0{,}30$), mens der for de som tilslutter sig fagidentitet D er signifikant ($p < 0{,}01$) flere der kalder udviklingen uønsket. Ser man i stedet på respondenter tilsluttet fagidentitet B, finder flertallet udviklingen ønskelig.

Selvom der er tale om forholdsvis små delpopulationer, så synes der alligevel at tegne sig et billede af en sammenhæng mellem hvilken fagidentitet man deklarerer sig som havende og hvilket syn man har på udviklingen af matematikfaget. De mest positive skal findes blandt dem der tilslutter sig en identitet med stor tyngde i *anvendelses*-dimensionen, hvilket på sin vis passer meget godt sammen med den udvikling der var beskrevet i kapitel 5.

Ligeledes ses den største modstand mod udviklingen blandt tilhængerne af de to fagidentiteter der nedtoner anvendelses-dimensionen. Der kan her nok ikke meningsfuldt skelnes skarpt mellem fagidentiteterne C og D.

Billedet synes altså at bekræfte at der er ”noget om snakken” omkring fagidentitets-begrebet. Det er faktisk muligt empirisk at vise, at der er en sammenhæng mellem respondenternes deklaration af fagidentitet og deres syn på fagets tilstand. Omvendt er det også tydeligt at der er en hel del respondenter som afviger fra det overordnede mønster. Det peger altså ikke på at fagidentitet forklarer alting på individniveau, men at det alligevel påvirker svarmønsteret på delpopulationsniveau.

7.2.2 Opfattelse af udviklingen siden 2005-reformen

I undersøgelsen blev der endvidere spurgt til undervisernes opfattelse af 2005-reformens overordnede betydning for gymnasiematematikfagets *indhold* og *faglige niveau.* Det skete med ét spørgsmål hvor der blev givet seks svarmuligheder der kombinerede muligheden for at beskrive indholdet som ”uforandret” overfor ”forandret” i forhold til om det faglige niveau er ”lavere”, ”det samme” eller ”højere”[6]. I tabel 7.8 er vist den overordnede svarfordeling.

Hvordan oplever du at gymnasieordningen fra 2005 har påvirket matematikfagets indhold og faglige niveau? (N = 125)			
Niveau: Indhold:	**Uforandret**	**Forandret**	**I alt**
Lavere niveau	26%	52%	78%
Samme niveau	3%	17%	20%
Højere niveau	0%	2%	2%
i alt	29%	71%	100%

Tabel 7.8) Fordeling af svar vedr. opfattelse af udviklingen af fagets indhold og niveau siden 2005.

Det ses at et flertal på ca. 70% af respondenterne tilslutter sig det synspunkt, at fagets indhold er ”forandret”. Et lidt større flertal på ca. 80% mener at man kan tale om at ”det faglige niveau er faldet”, mens ca. 20% mener det faglige niveau er det samme og synspunktet ”det faglige niveau er hævet” stort set ikke findes. Man kan også sige at knapt halvdelen af respondenterne finder at faget er indholdsmæssigt ”forandret og på et lavere niveau”, mens en fjerdedel angiver at det er indholdsmæssigt ”uforandret, men på et lavere niveau”. Endeligt kan man bemærke, at respondenter der opfatter faget som indholdsmæssigt forandret er noget mere tilbøjelige til at beskrive niveauet som ”uændret”. Dette kan formentlig forklares med, at stort set alle respondenter mener at der er sket en eller anden forandring, men at der kan være uklarhed om karakteren af denne.

I tabel 7.9 er fordelingen af svar opgjort efter hvilken fagidentitet respondenten har tilsluttet sig:

[6] Det stillede spørgsmål lød: *Hvordan oplever du at gymnasieordningen fra 2005 har påvirket matematikfagets indhold og faglige niveau?* De seks svarmuligheder var: a) Faget er blevet indholdsmæssigt anderledes og på et lavere niveau, b) Faget er indholdsmæssigt det samme, men på et lavere niveau, c) Fagets indhold og niveau har ikke forandret sig, d) Faget er blevet indholdsmæssigt anderledes, men på samme faglige niveau, e) Faget er indholdsmæssigt det samme, men niveauet er hævet og f) Faget er blevet indholdsmæssigt anderledes og på et højere fagligt niveau.

Fagidentitet A

N = 66	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	18%	59%	77%
Sam. Niv.	2%	18%	20%
Høj. Niv.	0%	3%	3%
i alt	20%	80%	100%

Fagidentitet B

N = 19	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	42%	37%	79%
Sam. Niv.	5%	11%	16%
Høj. Niv.	0%	5%	5%
i alt	47%	53%	100%

Fagidentitet C

N = 13	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	23%	38%	62%
Sam. Niv.	0%	38%	38%
Høj. Niv.	0%	0%	0%
i alt	23%	77%	100%

Fagidentitet D

N = 27	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	33%	52%	85%
Sam. Niv.	7%	7%	15%
Høj. Niv.	0%	0%	0%
i alt	41%	59%	100%

Tabel 7.9) Fordeling af svar vedr. opfattelse af udviklingen af fagets indhold og niveau, opdelt efter fagidentitet

Det ses her at der ikke er nogen markante forskelle mellem de forskellige fagidentiteter i forhold til opfattelsen af udviklingen i det faglige niveau. Hverken over- eller underrepræsentationen af "lavere niveau"-synpunktet hos fagidentitet C hhv. D er signifikante. Til gengæld synes der at være en signifikant sammenhæng mellem fagidentitet og oplevelsen af om faget har ændret sig. Her synes de som har tilsluttet sig fagidentiteterne A og C (som har stor vægt på teori-dimensionen til fælles) at være mere tilbøjelige til at se faget som forandret, end de som har tilsluttet sig B og D (som har mindre vægt på teori-dimensionen til fælles). For alle fire fagidentiteter gælder dog, at et flertal af dem som har tilsluttet sig den, har angivet at de oplever faget som forandret.

Ser vi endvidere på sammenhængen mellem *syn på* og *oplevelse af* udviklingen af faget siden reformen i 2005, tegnes det billede der ses af tabel 7.10.

Ønskelig udvikling

N = 45	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	7%	49%	56%
Sam. Niv.	2%	36%	38%
Høj. Niv.	0%	7%	7%
i alt	9%	91%	100%

Uønsket udvikling

N = 72	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	36%	58%	94%
Sam. Niv.	3%	3%	6%
Høj. Niv.	0%	0%	0%
i alt	39%	61%	100%

Indifferent

N = 8	Ufor.	For.	I alt
Lav.Niv	38%	13%	50%
Sam. Niv.	13%	38%	50%
Høj. Niv.	0%	0%	0%
i alt	50%	50%	100%

Tabel 7.10) Fordeling af svar vedr. opfattelse af udviklingen af fagets indhold og niveau, opdelt efter syn på udviklingen

Her ses en ret tydelig tendens til at de som mener faget har haft en "ønskelig udvikling" samtidig også ret entydigt mener at faget har forandret sig, mens de er noget mere delte på spørgsmålet om hvor vidt det faglige niveau er faldet eller ej. Omvendt gælder for dem som kalder udviklingen "uønsket" meget entydigt peger på at det faglige niveau er faldet, mens de er mere delte på hvor vidt faget faktisk har forandret sig. Gruppen af indifferente overfor udviklingen er så lille, at den ikke giver mening at opgøre.

Fra et fagidentitetsperspektiv kan man tolke det i retning af, at de som siger at udviklingen har været ønskelig, er enige om at faget har forandret sig i deres retning, mens de mener det er mere uklart om niveauet samtidig er faldet. Det virker altså her tænkeligt, at *fagidentitet* kan forklare det synspunkt. I hvert fald vil man ikke umiddelbart forvente at matematiklærere i sig selv opfatter en sænkning af niveauet som ønskeligt.

De som ser udviklingen som uønsket er en mere uklar gruppe. Der kan således være nogle der af identitetsgrunde er utilfredse med at faget er det samme eller nogen som mener det har forandret sig til det værre, samt omvendt nogen der er glade for at det er uforandret eller mener det har forandret sig til det bedre. Alle disse fire undergrupper synes dog at være enige om at nivauet er faldet og dette er således formentlig den væsentligste forklaring på at de finder udviklingen uønsket.

Et eksempel på denne uklarhed kommer fra følgende respondent, der har kaldt udviklingen ”meget uønsket” og angiver at det faglige niveau er lavere, men at faget er indholdsmæssigt uforandret:

> »Det centrale element omkring bevisførelse er blevet begrænset meget. Det fjerner fokus fra det centrale ved faget. CAS-værktøj og andre hjælpemidler får eleverne til at tage den letteste løsning, (fx. brug solve) og dette begrænser elevernes indlæring.« (Respondent #147, fag-ID: A)

Respondenten bekræfter på overfladen sine svar ved at sige at niveauet er faldet. Det er dog samtidig tydeligt, at respondentens utilfredshed har bund i uenigheder om fagidentiteten. Respondenten tilkendegiver eksplicit at der er noget som er ”det centrale ved faget”, som har mistet fokus fordi ”bevisførelse er blevet begrænset meget”. Dette er et godt eksempel på hvordan *fagidentitet* spiller ind på underviserdomænet. At fokus er flyttet fra bevisførelse til noget andet bliver for den underviser, for hvem bevisførelse er det centrale ved faget, til et fald i fagligt niveau og ikke til et skifte i fagets indhold.

Respondenten peger endvidere på CAS-værktøjer som en faktor for sin stillingtagen. Det er respondenten ikke ene om. Her følger tre yderligere frie kommentarer fra respondenter der har angivet udviklingen som delvist eller meget uønsket:

> »I min opfattelse bruger eleverne CAS-redskaber for meget og mangler nogle grundlæggende færdigheder til at forstå basale metoder.« (Respondent #93, fag-ID: C)
>
> »Eleverne kan ikke længere almindelig regning« (Respondent #61, fag-ID: A)
>
> »Elevernes færdigheder fra folkeskolen er generelt ikke gode. Lommeregnernes øgede kapacitet bevirker en ændring af behov for regnefærdigheder - denne udvikling er naturlig. Kravet om samspil med andre fag kan være en kilde til frustration, da matematik passer dårligt i tværfaglige forløb med nogle fag (gælder både AT og SRP).« (Respondent #172, fag-ID: D)

Det synes at være en udbredt opfattelse, at der findes et sæt af ”grundlæggende færdigheder” som er blevet svækket. Dette skyldes ifølge disse respondenter til dels mangler hos eleverne når de ankommer til gymnasiet, dels anvendelsen af digitale værktøjer (CAS-værktøjer).

Fra et fagidentitetssynspunkt er det oplagt, at færdighedstræning er svækket, hvis der trænes færre færdigheder og at de færdigheder som trænes kan udfoldes i mindre kompleks grad og i færre forskellige sammenhænge. Til gengæld er skiftet fra færdigheden ”opskriv ligning, løs ligning på papir ved algebraisk manipulation og fortolk svaret” til ”opskriv ligning, løs ligning med solvekommando i CAS-værktøj, fortolk svaret" ikke i sig selv at regne for et fald i fagligt niveau, men blot et skifte fra én færdighed til en anden. Altså ikke i sig selv en nedtoning af færdigheder som kernen i matematikfaget.

Eksemplet viser imidlertid at hvor denne afhandlings identitetsbegreb i hovedsagen handler om hvilke objekter og spørgsmål der hører til i faget, så er den faglige identitet hos en del undervisere også bundet op på formen af den måde man behandler fagets objekter og spørgsmål. Eksempelvis at ”papir og blyant” er rigtigere end ”Word og CAS-værktøj” eller at ”tavle og kridt” er rigtigere end ”powerpoint-præsentation”. Holdningen til form kan have mange årsager, som udover vane også kan være f.eks. holdning til hvordan matematisk forståelse udvikles. En form-orienteret fagidentitet dækkes ikke af det her anvendte begrebsapparat, men eksisterer formentlig, som vist i citaterne.

Det sidste af ovenstående citater erklærer samtidig at ”matematik passer dårligt i tværfaglige forløb med nogle fag”. Respondenten (#172) har angivet at faget er indholdsmæssigt uforandret siden 2005 og oplever altså at tværfaglige samspil fører til et lavere fagligt niveau, frem for at det er udtryk for at faget har ændret sin identitet og nu vægter nogle andre ting end tidligere - f.eks. at kunne spille en rolle i og med andre fag, frem for at alene fokusere på om nu matematik kan spille sin vante rolle i et givent samspil Også her synes fagidentitetsbegrebet at kunne fange problemstillingen.

Ser man på respondenter der har kaldt udviklingen ”meget” eller ”delvis” ønskelig, så dukker f.eks. følgende to frie kommentarer op, fra to respondenter der begge har tilkendegivet at fagets indhold har forandret sig og at det faglige niveau er faldet:

> »Større bredde. Mere anvendelse. Mere spændende for læreren. Men overfladisk for eleverne. Mere forvirret« (Respondent #133, fag-ID: A)
>
> »Det er fint, at vi i dag i langt højere grad inddrager projektforløb og praktiske eksempler. Det er problematisk, at vi i dag underviser langt flere elever end tidligere med svage faglige forudsætninger. […]«. (Respondent #56, fag-ID: B)
>
> »Har givet plads til eksperimenterende forløb og interessante forløb med sjov matematisk viden som der ikke var plads til tidligere.« (Respondent #96, fag-ID: D)

I alle disse tre citater synes der at fremtræde argumenter relateret til forandringer i fagidentiteten, for at udviklingen af faget har været ønskelig. Det handler om mere anvendelse og flere praktiske eksempler samt om projektforløb og eksperimenterende forløb. Alle tre oplever samtidig et fald i det faglige niveau, hvilket hos de to første respondenter forklares dels med at faget måske nok har fået en ”bedre fagidentitet” set fra lærerens synspunkt, men samtidig fremstår mere overfladisk og forvirrende for eleverne. Dels at eleverne er fagligt svagere end tidligere, fordi der optages flere.

Blandt de som har kaldt udviklingen ønskelig og som tvivler på synspunktet om et faldende fagligt niveau findes bl.a. følgende tre frie kommentarer:

> »Det er fint at man drager konsekvensen af at man nu har CAS-værktøjer, som kan klare slavearbejdet. Det har jeg betegnet som et lavere niveau, men det kan selvfølgelig diskuteres« (Respondent #112, fag-ID: B)
>
> »Hvad er "det faglige niveau"? Eleverne er blevet bedre til at problemløse, men de er ikke så gode til kvadratreglerne« (Respondent #28, fag-ID: A)

»Der er blevet skåret ned på antallet af delemner, men til gengæld er der lagt mere vægt på fortolkning af matematiske resultater siden gymnasiereformen. Det er også rart at gå fra pensumstyring til målstyring.« (Respondent #166, fag-ID: A)

Den første respondent her dykker ned i diskussionen om betydningen af form-skiftet fra "papir-og-blyant" til "CAS-værktøj". Respondenten bifalder udviklingen, men er i tvivl om det kan kaldes et fald i niveauet, selvom respondenten egentlig har svaret sådan.

Den anden respondent udtrykker her en kritik af niveau-begrebet for netop ikke at kunne beskrive et skifte i fagidentiteten. I stedet ser respondenten at udviklingen har betydet en forskydning af tyngde fra "færdighedstræning" og "teoriforståelse" til "problemløsning" og måske også anvendelses-dimensionen. Tilsvarende synspunkt findes hos den tredje respondent, som ser udviklingen som en reduktion i mængden af stof til gengæld for en opprioritering af det at kunne "fortolke matematiske resultater". Også her kan der tales om forskydninger i fagidentiteten.

De tre respondenter her synes altså med deres udsagn at understøtte en konklusion om, at bevægelserne i faget ikke alene kan reduceres til et spørgsmål om ændringer i det faglige niveau, men at der spiller et væsentligt element af *fagidentitet* ind i ændringen også, samt at forskellige fagidentiteter blandt undervisere giver sig udslag i forskellige synspunkter og vurderinger af situationen.

Samtidig understøttes en konklusion om, at fagidentitet og niveau kan være svære at skille ad, men at en underviser der oplever et skifte i fagets identitet væk fra sin egen fagidentitet kan afkode dette som et fald i fagligt niveau. Samtidig synes det rimeligt at konkludere, at særligt introduktionen af ny teknologi skaber nogle formmæssige ændringer, som også nemt bliver til fald i fagligt niveau, snarer end til en justering af fagidentiteten. Denne konklusion skal dog ikke bruges til at sige, at et skifte i fagidentitet og/eller form ikke kan betyde et fald i det faglige niveau.

7.2.3 Nedslag på konkrete synspunkter

Som det sidste i dette kapitel, vil der med afsæt i nogle mere konkrete spørgsmål om syn på eller opfattelse af forskellige forhold relateret til gymnasieskolens matematikfag blive undersøgt, om fagidentiteten synes at slå igennem i svarmønsteret.

I tabel 7.11 ses den første af sådanne opgørelser for spørgsmålet: "*Matematik i gymnasiet skal især handle om at anvende matematik uden for faget selv*?". Det ses her at andelen som er *uenig* er signifikant lavere ($p<0.01$) for fagidentitet B og signifikant højere ($p<0.01$) for fagidentitet C, hvilket stemmer fint overens med indholdet i de to fagidentiteter. Det ses samtidig at svarfordelingen indenfor fagidentiteterne A og D er den samme, hvilket også umiddelbart stemmer overens med indholdet i de to fagidentiteter, uden at der her skal laves en dybere analyse af dette.

Matematik i gymnasiet skal især handle om at anvende matematik uden for faget selv?					
Svar **Fagidentitet**	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	7%	7%	16%	0%	3%
Delvis enig	36%	34%	58%	13%	38%
Uenig	56%	56%	26%	88%	55%
Indifferent	2%	3%	0%	0%	3%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.11) Fordeling af svar vedr. syn på anvendelse af matematik i matematikfaget fordelt på fagidentiteter.

Man kan ikke gennemføre rigtig undervisning i matematik, uden et gennemgående fokus på definitioner, sætninger og beviser.					
Svar **Fagidentitet**	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	40%	42%	32%	56%	31%
Delvis enig	50%	46%	58%	44%	55%
Uenig	10%	11%	11%	0%	10%
Indifferent	1%	0%	0%	0%	3%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.12) Fordeling af svar vedr. syn på nødvendighed af beviser i matematikfaget fordelt på fagidentiteter.

I tabel 7.12 ses en tilsvarende opgørelse over spørgsmålet ”*Man kan ikke gennemføre rigtig undervisning i matematik, uden et gennemgående fokus på definitioner, sætninger og beviser.*”. Her er afvigelserne mindre end ved det første spørgsmål og derfor ikke signifikante. Men tendensen er alligevel klar. Enighedsgraden er størst hos fagidentitet C og næststørst hos fagidentitet A, netop de to fagidentiteter der vægter det *teoretiske* højt. Samtidig er graden af ”enig”-svar mindre og ensartet hos fagidentitet B og D.

I tabel 7.13 ses svarfordelingen for spørgsmålet ”*Det er i praksis umuligt at anvende matematik udenfor faget, hvis ikke man har en solid indsigt i fagets indre struktur og logik*”. Udsagnet møder forventeligt størst modstand i fagidentitet B, hvor synspunktet bør være at anvendelse er ”vigtigere” end teori og derfor kan klare sig med lidt eller ingen teori. Omvendt er modstanden mindst hos fagidentitet C, hvor man forventer det synspunkt at teori er vigtigere end anvendelse, som er underordnet eller ligegyldigt. Af dette kan netop ikke afledes et synspunkt om at anvendelse forudsætter teori. Derfor er det ikke overraskende at tilhængerne af denne fagidentitet især siger ”delvis enig”. Tilsvarende kan siges om fagidentitet A og D, hvorfor man også her vil forvente flest på ”delvis enig”, men med en større fordeling ud til yderpunkterne.

Det er i praksis umuligt at anvende matematik udenfor faget, hvis ikke man har en solid indsigt i fagets indre struktur og logik					
Svar **Fagidentitet**	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	23%	24%	16%	19%	28%
Delvis enig	50%	54%	32%	75%	41%
Uenig	24%	18%	53%	6%	31%
Indifferent	2%	4%	0%	0%	0%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.13) Fordeling af svar vedr. syn på nødvendighed af teori for anvendelse fordelt på fagidentiteter.

Omfattende brug af CAS-værktøjer undergraver matematik som fag.					
Svar Fagidentitet	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	16%	15%	5%	19%	24%
Delvis enig	29%	31%	26%	38%	21%
Uenig	52%	51%	68%	38%	52%
Indifferent	3%	3%	0%	6%	3%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.14) Fordeling af svar vedr. syn på CAS-værktøjer fordelt på fagidentiteter.

I tabel 7.14 ses svarfordelingen for spørgsmålet "*Omfattende brug af CAS-værktøjer undergraver matematik som fag*". Her synes det måske en smule overraskende at halvdelen af alle adspurgte svarer "uenig". Til gengæld er det ikke så overraskende at graden af uenighed er størst blandt fagidentitet B og mindst hos fagidentitet C (ingen af dem dog signifikant). Omvendt heller ikke mærkeligt at færrest blandt fagidentitet B og flest i fagidentitet D (der netop vægter matematik som en "sproglig færdighed) er enig i udsagnet.

I tabel 7.15 ses svarfordelingen for spørgsmålet "*Det bør være et væsentligt element i uddannelsen af matematikere, at lære hvordan matematik bringes i anvendelse udenfor matematikken*". Her rammer man hårdere på matematiklærernes fagidentitet, fordi man her taler om den uddannelse de selv mener at de burde have været udsat for, end på hvad deres elever skal udsættes for. Der er overraskende stor andel der erklærer sig "enig" eller "delvis enig" i udsagnet. Størst enighedsgrad er der dog ikke overraskende blandt fagidentitet B, mens den største uenighedsgrad findes hos fagidentitet C. Fagidentitet A og D har mange fælles punkter, hvilket heller ikke overrasker.

Det bør være et væsentligt element i uddannelsen af matematikere, at lære hvordan matematik bringes i anvendelse udenfor matematikken					
Svar Fagidentitet	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	43%	44%	63%	13%	45%
Delvis enig	38%	39%	21%	56%	34%
Uenig	15%	14%	11%	25%	14%
Indifferent	4%	3%	5%	6%	7%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.15) Fordeling af svar vedr. syn på anvendelse i matematiklæreres uddannelse fordelt på fagidentiteter.

Danmark vil som samfund indenfor 10-25 år opleve alvorlige problemer, på grund af dårlige matematikkundskaber blandt studenterne.					
Svar Fagidentitet	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	26%	25%	32%	31%	21%
Delvis enig	33%	35%	21%	25%	41%
Uenig	29%	28%	47%	25%	21%
Indifferent	12%	11%	0%	19%	17%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.16) Fordeling af svar vedr. syn på matematikkundskaber blandt studenter fordelt på fagidentiteter.

I tabel 7.16 er der spurgt på en lidt anderledes måde, end i de fem foregående holdningsspørgsmål. Her er læreren blevet bedt om at vurdere om det matematikfaglige niveau hos nutidens studenter vil give det danske samfund ”alvorlige problemer” på mellemlangt sigte (10-25 år). Dette er et spørgsmål til lærerens følelser. Formentlig har næsten ingen af gymnasiets matematiklærere nogen reel forudsætning for at tage stilling til udsagnet.

Overordnet set viser besvarelsen at den adspurgte population der ønsker at tage stilling til udsagnet fordeler sig nogenlunde ligeligt mellem de tre svarmuligheder. Mellem følelsen af en alvorlig situation, en situation med faretruende udfordringer og en oplevelse af ikke at stå med et væsentligt problem. Ser man på de tre fagidentiteter synes der ikke at være nogen stærk sammenhæng mellem hvilken fagidentitet respondenten har deklareret og hvilken følelse der angives i situationen.

Dette antyder at valget af fagidentitet ikke har rødder i følelsesbetonede holdninger til den aktuelle situation. Det kunne f.eks. være at valget af en fagidentitet mere var udtryk for en protest mod en følelsesbetinget oplevelse af at ”der er noget helt galt” eller lignende. Men ingen af fagidentiteterne synes på denne måde at være opsamlingssted for en sådan følelse. Tværtimod er synspunkterne lige fordelte og baggrunden for folks valg må formentlig søges i andre forhold. F.eks. at det udtrykker noget indholdsmæssigt om den enkeltes fagidentitet.

I tabel 7.17 og 7.18 er vist svarfordelingen på to spørgsmål der spørger ind til respondentens opfattelse af hvor aktivt elever som helhed kan arbejde med hhv. modellering og bevisgang. Altså en skelnen mellem en mindre selvstændig ”behandling af matematiske modeller” og ”præsentation af beviser” overfor det langt mere udfordrende at ”selvstændigt gennemføre matematisk modellering” og ”selvstændigt gennemføre bevisgang”.

Her viser der sig det måske lidt overraskende billede, at respondenter som har tilsluttet sig den rent anvendelsesorienterede fagidentitet B er mest tilbøjelige til at være enige i, at elever ikke kan lære selvstændig modellering og tilbøjelig til at være uenig i at de ikke kan lære selvstændig bevisgang. Omvendt er respondenter tilsluttet den rent teoriorienterede fagidentitet C mest uenig i at elever ikke kan lære modellering og mest enig i at de ikke kan lære selvstændig bevisgang.

Dette kan godt forekomme lidt paradoksalt. Men det afspejler muligvis en holdning om at den side af faget man selv mener skal vægtes højest også opfattes som sværere og mere kompliceret, mens den anden side opfattes som nem. Spørgsmålet er dog lidt dobbelttydigt, i det en respondent også kan erklære sig uenig hvis vedkommende er i uenig i spørgsmålets første del. En person deklareret med fagidentitet C kan således være uenig i at gymnasieelever overhovedet kan lære at behandle matematiske modeller. Denne tvetydighed til trods, vil hovedfortolkningen her være den første og den væsentligste pointe vil i øvrigt være, at der også her afspejler sig en sammenhæng mellem deklareret fagidentitet og mere eksplicitte holdninger til elementer af faget.

Gymnasieelever kan godt lære at behandle matematiske modeller, men ikke at selvstændigt gennemføre matematisk modellering.					
Svar	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	13%	11%	32%	25%	17%
Delvis enig	50%	62%	63%	31%	45%
Uenig	34%	25%	5%	44%	31%
Indifferent	3%	1%	0%	0%	7%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.17) Fordeling af svar vedr. syn på modeller og modellering hos gymnasieelever, fordelt på fagidentiteter.

Gymnasieelever kan godt lære at præsentere beviser, men ikke at selvstændigt gennemføre en bevisgang.					
Svar	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	16%	15%	21%	19%	14%
Delvis enig	41%	42%	26%	63%	38%
Uenig	38%	37%	47%	13%	48%
Indifferent	4%	6%	5%	6%	0%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.18) Fordeling af svar vedr. syn på beviser og bevisgang hos gymnasieelever fordelt på fagidentiteter.

Gymnasiefaget matematik handler i dag mest om at anvende matematik uden for faget selv					
Svar	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	8%	6%	5%	19%	10%
Delvis enig	30%	37%	21%	25%	24%
Uenig	55%	51%	68%	50%	59%
Indifferent	7%	7%	5%	6%	7%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.19) Fordeling af svar vedr. syn på anvendelses status i matematik i dag, fordelt på fagidentiteter.

Gymnasielærere i matematik opnår i deres matematikuddannelse ikke kvalifikation til i almindelighed at arbejde med modeller, modellering og anvendelse					
Svar	**Alle**	**A**	**B**	**C**	**D**
Enig	10%	14%	11%	0%	7%
Delvis enig	43%	39%	37%	63%	45%
Uenig	29%	31%	32%	25%	24%
Indifferent	18%	15%	21%	13%	24%
N	*135*	*71*	*19*	*16*	*29*

Tabel 7.20) Fordeling af svar vedr. syn på anvendelse i uddannelse af matematiklærere fordelt på fagidentiteter.

Endeligt er der i tabel 7.19 og 7.20 spurgt indtil respondentens opfattelser af anvendelsesaspektets rolle og mulighed i det aktuelle gymnasium. Det ses i tabel 7.19 at lidt over halvdelen af respondenterne afviser at faget i dag mest er orienteret mod anvendelsesaspektet. Afvisningsgraden er en smule større blandt dem der har deklareret en ren anvendelsesorienteret identitet (B), mens den er en smule mindre hos dem der har deklareret en ren teoriorienteret identitet (C). Dette kan groft sagt udlægges sådan, at der for begge fagidentiteter synes at være en tendens til, at de ikke møder deres egen fagidentitet i faget.

I tabel 7.20 ses det, at ca. halvdelen af respondenterne (for alle deklarerede fagidentiteter) angiver at være enig eller delvis enig i, at der kan være uddannelsesmæssige forhindringer i at lade gymnasiets matematiklærere arbejde med et anvendelsesorienteret fokus. Eksistensen af en sådan barriere kan naturligvis i sig selv være med til nedtone anvendelsesdimensionen hos underviseres fagidentitet. Spørgsmålet skelner dog ikke mellem om læreren selv mener ikke at være uddannet til et sådan fokus, eller om det i højere grad er ”de andre lærere” der har denne mangel.

7.3 Sammenfatning: Fagidentiteter hos undervisere

Ideen i dette kapitel har som sagt været at se hvad der skete, hvis man deklarerede en række fagidentiteter og bad undervisere om at angive hvilken af disse de tilhørte. Formålet har således været at undersøge om fagidentitetsbegrebet gav mening som et ekspliciteret begreb på individniveau. Dette i modsætning til kapitel 8, hvor undersøgelsen først og fremmest søger at kortlægge fagidentiteter uden at dette direkte deklareres.

De fire opstillede fagidentiteter har især haft fokus på balancen mellem teori- og anvendelsesdimensionen, da denne balance har været vurderet mest interessant i forhold til 2005-reformens ændringer. Ikke overraskende har de fleste respondenter valgt den identitet (A) der taler om en balance mellem de to ting. Men der har også været to grupper af respondenter som har valgt en af de to fagidentiteter der var klart tonet mod en af de to dimensioner (B og C). Endeligt har en gruppe valgt den ret uklare fagidentitet ”matematik er et sprog” (D).

I analysen af betydningen af disse deklarerede fagidentiteter, har fokus især været lagt på de to fagidentiteter (B og C) som toner rent flag. Her ses det at fordelingen af svar på bestemte spørgsmål om respondentens synspunkter opfører sig som man kunne forvente ud fra deklaration af fagidentitet. At sådanne mønstre kan ses er med til at bekræfte, at deklaration af en fagidentitet faktisk afspejler en dybereliggende principiel fagopfattelse.

Det ses endvidere at også at opfattelsen af gymnasieskolens matematikfag og dets udvikling med 2005-reformen varierer efter fagidentiteterne. De som toner rent flag i anvendelsesretningen er således langt mere begejstret, end de som toner rent flag i teoriretningen. En fordeling af synspunkter som stemmer godt overens med den udvikling der har været beskrevet på såvel system- som lærebogsdomænet i kapitel 5 og 6.

Ovenstående observationer kan til en vis grænse være med til at afklare et af de kritikpunkter der kan rejses mod forsøg på at undersøge fagidentiteter hos undervisere, nemlig at underviserens fagidentitet i højere grad afspejler erfaringer fra en pædagogisk praksis, end et dybereliggende fagsyn. Altså en pragmatisk afvejning af ”*hvad der kan lade sig gøre*” frem for en principiel holdning til ”*hvad det burde være*”.

Analysen viser umiddelbart at begge positioner eksisterer, men samtidig også at den principielle tilgang er mest udbredt. Denne konklusion er ret usikker, fordi metoden ikke har været designet direkte til at afklare dette spørgsmål. Distinktionen mellem ”pragmatisk” og ”principiel” fagidentitet dukker først op i analysen af svarene. Men konklusionen bakkes op af, at der kan ses visse tydelige sammenhænge mellem deklareret fagidentitet og tilkendegivne synspunkter på mere konkrete spørgsmål.

Den største svaghed ved analysen i dette kapitel er formentlig det store antal respondenter som tilslutter sig de to fagidentiteter som ikke bygger på entydig orientering mod enten teori- eller anvendelsesdimensionen. Mennesker der stilles overfor et valg mellem to poler, vil formentlig være tilbøjelige til at tilstræbe balance. En fjerdedel af respondenterne har således peget på denne fagidentitet og samtidig angivet som grund, at de mener balancen pt. er tippet for meget i *anvendelses*-dimensionens retning. Dette til trods for at analyserne i kapitel 5 og 6 peger mod at der aktuelt er størst tyngde i teori-dimensionen, om end anvendelses- og meta-dimensionerne fylder mere end de historisk har gjort.

Den væsentligste observation i materialet i dette kapitel er, at der eksisterer klare sammenhænge mellem vurderingen af ønskeligheden af gymnasiereformen fra 2005 og så den fagidentitet man deklarerer sig selv med. Den forskydning af tyngde mod anvendelsesdimensionen som er påvist i fagidentiteterne på system- og lærebogsdomænerne slår her igennem med en markant mere positiv indstilling overfor udviklingen siden 2005 hos respondenter der har tilsluttet sig fagidentitet A og B (med fokus på balance hhv. primær orientering mod anvendelse). Og omvendt mere negativ indstilling hos respondenter tilsluttet fagidentitet C og D.

Denne observation er vigtig, fordi den understøtter en af afhandlingens hovedpointer, nemlig at fagidentitet er en afgørende barriere for forandringer i matematikundervisningen, uden at der her er taget stilling til kvaliteten af forandringer. Fagidentitet kan således opfattes som et - af flere - bidrag til forklaringen på, at ca. 3 ud af 5 respondenter angiver at fagets udvikling siden 2005 har været meget eller delvist uønsket.

Et andet bidrag til forklaringen på dette er, at ca. 4 ud af 5 respondenter angiver at det faglige niveau er faldet med 2005-reformen. Blandt de som finder udviklingen uønsket er det stort set alle der har den opfattelse. I forlængelse af dette kunne man koble denne opfattelse til introduktionen af CAS-værktøjer som bærende element i faget. Her erklærer omkring halvdelen af respondenterne sig imidlertid *uenig* i udsagnet at "omfattende brug af CAS-værktøjer undergraver matematik som fag" og kun 16% erklærer sig *enig*. I tabel 7.21 er svarene opdelt efter syn på 2005-reformen.

Omfattende brug af CAS-værktøjer undergraver matematik som fag.				
Svar Syn på 2005-reform	**Alle**	**Meget/delvist uønsket**	**Samme**	**Meget/delvist ønsket**
Enig	16%	28%	0%	2%
Delvis enig	29%	38%	29%	15%
Uenig	52%	31%	57%	83%
Indifferent	3%	3%	14%	0%
N	*135*	*74*	14	*47*

Tabel 7.21) Fordeling af svar vedr. syn på CAS-værktøjer fordelt på syn på 2005-reform.

Det ses at de som er negative overfor 2005-reformen er meget delte i deres vurdering af CAS-værktøjer, mens de som ser positivt på 2005-reformen afviser omfattende brug af CAS-værktøjer som "ødelæggende" for undervisningen. Konklusionen på kapitel 7 bliver altså, at undervisernes deklarerede fagidentitet og deres syn på udviklingen af det faglige niveau ser ud til at forklare deres stillingtagen overfor 2005-reformen, mens opfattelser af CAS-værktøjer ikke synes at forklare en negativ indstilling, men muligvis bidrager til de som ser positivt på udviklingen.

8 Analyse: Undervisernes fagidentiteter

I dette kapitel vil analysens hovedformål være det samme som det var tilfældet for analysen i kapitel 7, nemlig at undersøge hvilke fagidentiteter der eksisterer blandt undervisere. Men i dette kapitel vil analysen blive vendt om. Hvor der i kapitel 7 var fokus på hvordan den enkelte lærer selv deklarererede sin identitet, vil der i dette kapitel være fokus på at forsøge at kortlægge forskellige fagidentiteter ved hjælp af lakmus-prøver. Det vil sige i stedet for at spørge direkte, så spørge indirekte.

Som grundlag for denne analyse er der i spørgeskemaet præsenteret i afsnit 4.4.2 medtaget en lang række af opgaver, som respondenten har skullet forholde sig til. Hovedideen i denne metode er, at det først er i mødet med konkrete forslag til undervisningsspørgsmål inden for rammen af en matematikundervisning, at en underviser viser sin "faktiske" fagidentitet. Metodologisk kræver dette et ikke-trivielt analyse-fortolkningsarbejde for at konstruere denne "faktiske" fagidentitet.

Respondenten er således i en række situationer blevet bedt om at forholde sig til opgaver af forskellig art. Først og fremmest en sekvens på 16 opgaver i tilfældig rækkefølge, men valgt ud fra bestemte hensyn. Dernæst for fire anvendte eksamensopgaver og fire mere åbne modelleringsopgaver. Og endeligt en sekvens på 8 formuleringer af *fagligt samspil* med forskellige andre fag.

I det følgende vil hver enkelt af disse opgaver blive analyseret og kommenteret, der vil blive fremlagt forskellige svar-statistikker og relevante kommentarer fra respondenter og på den baggrund vil hver opgave blive tildelt en tyngde i hvert tyngdepunkt. Denne tyngde vil på baggrund af den enkelte respondents svar blive oversat til et tyngdebidrag i denne respondents fagidentitet og på baggrund af en samlet opgørelse vil der således fremkomme en *analytisk fagidentitet* for hver underviser.

Der kan med god ret fremsiges rigtig meget kritik af en metode som denne og det er netop derfor at der forud for opgørelsen vil være en diskussion af hvert enkelt bidrag, så man har mulighed for at gøre sig relevante forbehold overfor konklusionen. Omvendt ville det ikke være muligt at koge alt den indsamlede information ned til en nogenlunde overskuelig konklusion, hvis ikke man foretog den slags sammenfatninger af data.

Samtidig er det også her vigtigt at holde sig for øje, at metode og begrebsapparat i hele denne afhandling er udviklet sideløbende. Spørgeskemaet er således udviklet på et tidligt tidspunkt, hvor begrebsapparatet endnu var under udarbejdelse. Spørgeskemaet har derfor ikke nødvendigvis været optimeret til at afdække de distinktioner der er centrale i det endelige begrebsapparat.

Endeligt bør man tage det forbehold for hele analysen, at respondenter jo har mange forskellige motiver for at svare på spørgsmål, især når spørgsmålet grundlæggende set har en underliggende motivation som man af metodiske grunde ikke har kunnet lægge frem for respondenten, fordi man netop ønskede et spontant svar baseret på intuition og grundlæggende identitet, frem for et hvor respondenten forsøger at tilpasse sig sine forestillinger om sig selv.

De statistiske test der indgår i kapitlet er alle ensidige binomialtest med et signifikansniveau på 5%.

8.1 Sekvens på 16 opgaver

Respondenterne i undersøgelsen blev præsenteret for 16 forskellige opgaver, som blev bragt i en tilfældig (men for alle ens) rækkefølge. For respondenterne hed de således opgave 1-16. Opgaverne var imidlertid designet så de hører parvis sammen ud fra en særlig intention fra spørgerens side. De otte par navngives derfor A-H og inden for det enkelte par f.eks. E1 og E2.

For alle opgaver i sekvensen har respondenten fået stillet de samme to spørgsmål som skelner mellem syn på opgaven i undervisningen overfor som skriftlig eksamensopgave. Til hvert spørgsmål blev givet tre svarmuligheder. Spørgsmålene fremgår herunder (hvor X angiver opgavens nummer):

<table>
<tr><td colspan="2">Spørgsmål 1: ”Hvad er dit syn på opgave nr. X?”</td></tr>
<tr><td>Kortsvar</td><td>Langt svar (fra skemaet)</td></tr>
<tr><td>Central</td><td>”Hvis jeg bestemte, ville en opgave som denne være central for matematikfaget”</td></tr>
<tr><td>Mulig</td><td>”Hvis jeg bestemte, ville en opgave som denne være en mulig sideaktivitet i matematikfaget.”</td></tr>
<tr><td>Afvist</td><td>”Hvis jeg bestemte, ville en sådan opgave ikke optræde i matematikfaget.”</td></tr>
<tr><td colspan="2">Spørgsmål 2: ”Hvis du bestemte, ville en opgave som denne så kunne forekomme ved en 5-timers skriftlig matematik-eksamen på gymnasiets højeste niveau.”</td></tr>
<tr><td>Kortsvar</td><td>Langt svar (fra skemaet)</td></tr>
<tr><td>+</td><td>Ja</td></tr>
<tr><td>÷</td><td>Nej</td></tr>
<tr><td>?</td><td>Ved ikke</td></tr>
</table>

Her refererer ”kort svar” til den etiket som svarmuligheden vil bære i analyserne herefter, mens ”langt svar” angiver hvordan svar-muligheden var formuleret for respondenten. Fremhævningerne optrådte også overfor respondenten. Spørgsmål 1 vil almindeligvis blive refereret til ved opgavens navn, f.eks. D2, mens det tilhørende spørgsmål 2 vil blive refereret til som f.eks. D2x.

Opdelingen i to spørgsmål handler om for det første at bede respondenten om at tage stilling til om respondenten mener opgaven har noget med faget at gøre samt om den repræsenterer noget meget eller lidt vigtigt, sekundært om opgaven er så central, at respondenten mener det bør indgå i den skriftlige eksamen, som gennemgående i denne afhandling omfattes som retningsgivende for faget. Her har det været et krav, at svaret ”afvist” til spørgsmål 1 har ført til et ”nej” i spørgsmål 2.

8.1.1 Anvendelsesorienterede opgaver

Fire af de otte par opgaver har været anvendelsesorienteret i den forstand, at der i formuleringen indgår referencer til noget der af natur ikke er matematisk. De fire par af sådanne opgaver har været designet ud fra et ønske om at de skulle opfylde følgende kriterier:

A. *Ikke-matematisk*. Opgave som ikke umiddelbart knytter an til faget.
B. *Åben modellering*. Opgave hvor det forekommer umiddelbart oplagt at matematik nok kan spille en rolle, men rollen fremtræder ikke umiddelbart.
C. *Anvendt problem*. Opgave hvor matematikkens rolle er klar, men hvor løsningen af opgaven kræver en række selvstændige skridt.
D. *Anvendt øvelse*. Opgave der kan løses umiddelbart ved aktivering af færdigheds-algoritme.

Opgavepar A: Ikke-matematisk opgave

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 5 og 12 i opgavesekvensen:

A1: Ikke-matematisk 1 (5)	**A2: Ikke-matematisk 2 (12)**
I hvor høj grad er kærlighed et dominerende tema hos skuespilforfatteren William Shakespeare?	Hvad betyder den lokale flora omkring et bistade for biernes produktion af honning?

Intentionen i begge opgaver er, at man ikke umiddelbart kan relatere dem til noget hvor matematik for alvor synes at kunne spille en rolle, idet A1 skulle være en mere radikal variant af dette end A2. I undersøgelsen faldt svarende som vist i tabel 8.1:

Spørgsmål	**N**	**A1**			**A1x**			**A2**			**A2x**		
Svar	**#**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**
Alle	174	0%	9%	91%	0%	99%	1%	1%	34%	66%	2%	92%	6%
Fagidentitet A	96	0%	9%	91%	0%	99%	1%	1%	31%	68%	2%	94%	4%
Fagidentitet B	21	0%	14%	86%	0%	100%	0%	0%	38%	62%	5%	90%	5%
Fagidentitet C	19	0%	11%	89%	0%	100%	0%	0%	42%	58%	5%	84%	11%
Fagidentitet D	38	0%	3%	97%	0%	100%	0%	0%	34%	66%	0%	92%	8%

8.1) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave A1 og A2 i sekvens på 16 opgaver

Det ses at begge opgaver overordnet set afvises af de fleste. A1 af 91% og A2 af 66%. Det ses endvidere at respondenter der har tilsluttet sig fagidentiteterne B og C er en smule mere tilbøjelige til at lukke de to opgaver ind i deres fag, end for de to øvrige fagidentiteters vedkommende.

Den generelle afvisning af A1 følges af følelsesladede frie kommentarer som »*er det en vits ?*« (#110), »*Er dette for at sikre, at jeg tænker??*« (#169) og »*Tager du pis på mig?!*« (#96). Her kommer identitetsbegrebet til sin ret, for disse reaktioner synes at være klart udtryk for at nogen er blevet udfordret stærkt på deres fagidentitet.

I den mere substantielle ende finder man udsagn som »*Den er helt givet for langt ude*« (#161), »*At blande matematik ind i Shakespear er fortænkt.*« (#1) og »*Jeg er meget åben over for opg A1, hvis det kan lade sig gøre at behandle det matematisk, men det er umiddelbart lidt sværere at se hvordan*« (#47). Her er argumenterne mere funderet i at opgaven hurtigt afkodes som umulig at besvare - i hvert fald inden for rammerne af matematikfaget.

Ser man på dem som ikke er afvisende fås bl.a. følgende frie kommentarer:

> »En opgave der helt sikkert kan give en sund diskussion. Kan alt kvantificeres ? Kan man lave kriterier (en model) der giver et fornuftigt grundlag for at besvare spørgsmålet.« (Respondent #152)

I kompetencetermer peger respondenten her på at opgaven har et potentiale indenfor tankegangskompetence. Det vil sige som oplæg til en diskussion af rækkevidden af hvad matematik overhovedet kan svare på. Det bliver i den forstand til en meta-refleksion over fagets mulige anvendelighed inden for andre fagområder (dvs. tyngdepunktet *videnskabsteori*).

Opgave A2 tages pænere imod end A1. I et uddybende spørgsmål til de 48 som har afvist A1 men accepteret A2 , angiver 73% begrundelsen ”*Jeg ser et matematisk potentiale i opgave A2, men ikke i opgave A1.*”. Endvidere tilslutter 75% sig som begrundelse for accept af A2 udsagnet ”*Modellering og anvendelse er vigtige sider af matematik*” og 77% tilslutter sig udsagnet ”*Jeg forestiller mig et tilhørende bilagsmateriale*”.

Sidstnævnte skal man være opmærksom på, fordi opgaven dermed tillægges en egenskab den i grunden ikke har. Opgaven er tænkt sådan at elever i en undervisningssituation skal have opgaven og så selv skal arbejde sig igennem løsningsprocessen herunder indsamling af empiri. Men det kan tyde på at respondenterne i højere grad opfatter det som en opgave hvor der skal laves forskellige typer af statistiske test og vækstmodeller på et udleveret materiale. Derfor må opgaven for en sådan fortolkning siges at ligge i spændet mellem tyngdepunkterne ”service” og ”værktøj”.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.2.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave A1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	2	0
Opgave A2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0

8.2) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne A1 og A2

Opgavepar B: Åben modelleringsopgave

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 9 og 3 i opgavesekvensen:

B1: Åben modellering 1 (9)	**B2: Åben modellering 2 (3)**
Hvad er den bedste transportform?	Hvor tidligt står den indre planet Venus op?

Ideen i disse to opgaver er at stille et spørgsmål, hvor det virker umiddelbart intuitivt klart, at her kan matematik godt bidrage med noget, men hvor det er helt uklart hvad dette ”noget” er, fordi besvarelse vil kræve en fuld aktivering af modelleringscirklen (for diskussion af opgave B1 se Jensen (2009, s.46-48) og af opgave B2 se Jensen (2012a)). Fordelingen af svar ses i tabel 8.3.

Spørgsmål	**N**	**B1**			**B1x**			**B2**			**B2x**		
Svar	**#**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**
Alle	174	2%	38%	60%	3%	92%	5%	1%	30%	69%	2%	93%	5%
Fagidentitet A	96	1%	36%	63%	3%	95%	2%	0%	29%	71%	1%	94%	5%
Fagidentitet B	21	10%	43%	48%	10%	81%	10%	5%	29%	67%	5%	90%	5%
Fagidentitet C	19	0%	37%	63%	0%	100%	0%	0%	42%	58%	0%	95%	5%
Fagidentitet D	38	3%	39%	58%	0%	87%	13%	3%	26%	71%	5%	89%	5%

8.3) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave B1 og B2 i sekvens på 16 opgaver

Også disse to spørgsmål bliver overordnet set afvist af flertallet og kun meget få angiver dem som noget der bør spille en central rolle i matematikfaget. For spørgsmål B1 ses en lille overvægt af tilhængere blandt dem som har tilsluttet sig fagidentitet B. Og overraskende en lille overvægt af tilhængere af B2, blandt dem som har tilsluttet sig fagidentitet C.

Igen vækker et spørgsmål som B1 følelser, bl.a. med en reaktion som »*Et idiotisk spørgsmål - hvad skal transporteres ? - og hvorhen ?*« (#123) og »*Spørgsmålet (i lighed med flere af de lignende) er komplet irrelevant, og gør jo kun, at man ikke tager resten seriøst!*« (#40). Et andet typisk svar:

> »Opg B1 er af typen Hvad er højest et tordenskrald eller rundetårn. Der skal vides ud fra hvilke kriterier en transportform skal bedømmes, økonomisk, bæredygtig, behagelig osv. Ellers er der intet svar.« (Respondent #103, fag-ID: D)

Det synspunkt at opgaven lider under at det ikke ud fra formuleringen er klart, hvilket svar der overhovedet vil kunne kaldes ”rigtigt”, går igen i mange frie kommentarer. Og i et uddybende spørgsmål til de 104 respondenter som har afvist opgaven, tilslutter 80% sig synspunktet ”Det er for uklart hvad det er man skal svare”, mens kun 35% tilslutter sig ”Det er ikke relevant for matematik at svare på spøgsmålet”. 52% tilslutter sig at de ville kunne bruge opgaven, hvis den var fulgt af et ”velvalgt bilagsmateriale”. Der synes altså at være en stor fagidentitets-forankret modstand mod spørgsmål, hvor svar-domænet er uklart. Respondenterne synes altså at vende sig imod tyngdepunktet ”værktøj”, mens færre har noget imod at agere ”service”-funktion.

Blandt dem som har tilsluttet sig opgaven er der også en vis skepsis overfor graden af åbenhed. F.eks. i udsagn som »*Opgaven er for åben og kræver FOR meget af elevernes kreativitet for at deres besvarelse bliver matematisk funderet*« (#168). Mange peger på at det vil være et godt projektemne, at det vil være tidskrævende og kræve en anden eksamensform, hvis det skal bruges til det.

For opgave B2 er en udbredt begrundelse for afvisning at respondenten ikke selv forstår opgaven (f.eks. #133, #115 og #1), at opgaven er uklar eller uoverskuelig (f.eks. #56, #66 og #161) eller at den nok er for kompliceret, f.eks. »*Jeg går ud fra at det er temmelig kompliceret at udregne. Kan ikke selv umiddelbart løse opgaven.*« (#41). En anden typisk grund er udsagn som »*Det er en astronomiopgave*« (#61) og »*Denne opgave, synes jeg, lægger op til at man skal slå op i en databog eller lignende. Det hører mere til i fysik.*« (#173). Altså et grundsynspunkt om, at opgaven hører hjemme i et andet fag, hvorfor matematik ikke skal arbejde med problemstillingen.

Opgave B1 har oplagt sin tyngde i tyngdepunktet ”værktøj”, mens opgave B2 ud fra diskussionerne lander med delt tyngde mellem tyngdepunkterne ”service” og ”værktøj”, idet opgaven kan opfattes som en service overfor fysik eller astronomi, hvor der blot mangler de nærmere detaljer i opgaven. Her udviser en del respondenter i øvrigt modstand mod at matematik optræder i servicefunktion overfor disse to fag.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.4.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave B1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
Opgave B2	0	0	0	0	0	0	0	0	2	2	0	0	0

8.4) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne B1 og B2

Opgavepar C: Anvendte problemer

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 15 og 7 i opgavesekvensen:

C1: Anvendt problem 1 (15)	**C2: Anvendt problem 2 (7)**
En kystvagt i et 15 m højt udsigtstårn får en morgen øje på et fjendtligt skib mod øst, der netop er kommet fuldt til syne i horisonten. Han slår straks alarm! Hvor lang tid har hans landsby til at gøre sig klar til forsvar? Vindhastigheden er 2 sekundmeter* fra nord. Jordens radius er 6378 km. Friktionen mellem båd og vand er 916N. Skibet sejler konstant 8 knob**. Vagten vejer 78 kg. *) Sekundmeter er et populært udtryk for ”meter pr. sekund”. **) Knob betyder ”sømil pr. time”. Der er 21600 sømil rundt om jorden.	Ifølge hjemmesiden www.hunde-info.dk kan sammenhængen mellem en voksen hunds vægt (kg) og daglige energibehov (kJ) beskrives med formlen: $E = 523 \cdot m^{0,75}$ a. Hundefoder koster ca. 25 øre pr. 100 kJ. Hvor tung en hund kan man købe, hvis udgifterne ikke skal overstige 8000 kr. om året. b. Teksten siger at en normal voksen hund har et dagligt energibehov på 240 kJ pr. kg. kropsvægt. Hvad vejer en ”normal voksen hund”?

Opgaverne er oplagt af anvendt art. At det kaldes *problemer* betyder at spørgsmålene ikke umiddelbart kan besvares ved straksaktivering af en velkendt færdighedsbåret løsningsmetode, men kræver at man selv udtænker en løsningsproces, som ikke behøver være entydig. Opgave C1 er en såkaldt ”kontekstrig opgave”, hvor der gives flere informationer end der behøves[7]. Opgave C2 ligner umiddelbart en typisk model-opgave fra skriftlig eksamen, men de spørgsmål der stilles kræver en mere kompleks løsningsproces (se Jensen (2009a, s.88-89) for diskussion af opgave C2).

Fordelingen af svar ses i tabel 8.5.

Spørgsmål	**N**[8]	**C1**			**C1x**			**C2**			**C2x**		
Svar	**#**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**
Alle	174	21%	60%	20%	21%	68%	11%	63%	34%	3%	74%	18%	8%
Fagidentitet A	96	21%	57%	22%	20%	70%	10%	66%	31%	3%	75%	16%	9%
Fagidentitet B	21	19%	71%	10%	14%	81%	5%	71%	24%	5%	67%	24%	10%
Fagidentitet C	19	16%	63%	21%	21%	63%	16%	32%	68%	0%	74%	16%	11%
Fagidentitet D	38	24%	57%	19%	27%	59%	14%	68%	29%	3%	74%	24%	3%

8.5) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave C1 og C2 i sekvens på 16 opgaver

Her skifter stemningen en hel del. Et stort flertal opfatter opgave C1 som en der kan optræde i matematikundervisning, mens stort set alle respondenter mener opgave C2 kan bruges. For C1 kan man se en lidt større accept blandt dem der er tilsluttet fagidentitet B og for C2's vedkommende en forskydning fra ”central” til ”mulig” blandt dem der er tilsluttet fagidentitet C.

[7] Med jordens radius kan afstanden til horisonten set fra et 15 meter højt tårn beregnes. Ligeledes kan jordens omkreds i kilometer, hvorved 8 knob kan oversættes til km/h. Tilbage står at regne sejltiden ud - hastigheden er jo konstant.
[8] For spørgsmål C1 er N = 173 for ”Alle” og N = 37 for fagidentitet D.

Blandt de 36 som finder opgave C1 central, tilslutter hovedparten (81%) sig ved uddybende spørgsmål synpunkterne ”*Opgaven er klart matematisk, men samtidig anvendt*” og ”*Det er en god udfordring at skulle sortere irrelevante oplysninger fra*”. Samtidig tilslutter 53% sig at ”*Det er et spændende og komplekst problem*”. Der er altså en kerne her som bliver begejstret af opgavens karakter af at være et ”anvendt problem”.

Blandt de 103 der angiver opgaven C1 som ”mulig”, tilslutter 53% sig udsagnet ”*Det er ikke centralt at kunne løse et sådan problem, men god træning at gøre det*” som begrundelse for at den ikke er central, mens 50% tilslutter sig udsagnet ”*Opgaven er mest en fysik-opgave*.” og 33% tilslutter sig udsagnet ”*Opgaven forudsætter viden der ligger udover det matematiske*”. Blandt de 34 respondenter der har afvist opgaven, tilslutter 53% sig ligeledes at ”*Opgaven hører hjemme i fysik*”. Det indikerer altså at identitetsmæssige afgrænsninger af hvad der er ”indenfor” og ”udenfor” matematik, herunder ovre i andre fag, fylder en del ved stillingtagen til opgaven.

Dette understøttes af, at 48% af de 33 der afviste C1, men har accepteret C2, tilslutter sig begrundelsen ”*Opgave C2 kræver kun brug af ikke-matematisk viden i et rimeligt omfang*” for denne skelnen. Opgave C2 er som vist ovenfor ganske populær og 74% af alle finder den egnet til eksamen. Som fri kommentar kan man bl.a. finde følgende:

> »En detalje: der bør angives, at E står for energibehov, og m står for vægten..« (Respondent #25)
>
> »Men den er kedelig - dog god for svage elever. Så den kunne også forekomme på B-niveau« (Respondent #24)
>
> »Der skal tænkes for meget i denne opgave. Det ville være meget bedre, hvis opgaven gik ud på at beregne m eller E, når den anden størrelse var kendt. Opgaveformuleringen kunne måske bruges i et fagsamarbejde med biologi.« (Respondent #166)

Alle tre citater læner sig op ad en bestemt tendens for opgave C2, nemlig at den tolkes i forhold til den type af potensmodel-opgaver som aktuelt er velkendte. Det første citat er således en tilretning der matcher det kendte, hvor respondenten ikke synes at overveje at kobling af størrelse og variabel kunne være en selvstændig opgave. Det andet citat tyder på en respondent der slet ikke får kigget ordentligt på spørgsmålenes problemkarakter, mens det sidste citat er fra en der har opdaget denne karakter, men dybest set helst så at man gik tilbage til en mere simpel øvelses-form.

I vurderingen af de to opgaver kan det i første omgang bemærkes, at der i dem begge er et væsentligt element af *problemløsning*. Dette er dog tydeligst i C1, mens C2 i højere grad læner over mod tyngdepunktet *færdighedstræning*. I anvendelsesdimensionen giver de begge tyngde til *motivation* i det at for begge opgaver er indholdet i spørgsmålet styret af matematiske hensyn. I C2 er der dog et element af *service*, fordi modellen er autentisk og i hvert fald det første spørgsmål godt kunne tænkes at blive stillet.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.6.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave C1	0	3	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0
Opgave C2	1	2	0	0	0	0	0	2	1	0	0	0	0

8.6) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne C1 og C2

Opgavepar D: Anvendte øvelser

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 13 og 11 i opgavesekvensen:

D1: Anvendt øvelse 1 (13)

I en model for udviklingen i antallet af bakterier i en bakteriekultur betegner $B(t)$ antallet af bakterier til tiden t (målt i døgn). I modellen antages det, at

$$\frac{dB}{dt} = 1{,}55 \cdot 10^{-4} \cdot B \cdot (2000 - B)$$

Det oplyses, at der til tidspunktet $t = 0$ er 50 bakterier i bakteriekulturen. Bestem antallet af bakterier i bakteriekulturen efter 15 døgn.

D2: Anvendt øvelse 2 (11)

I en operaforening er aldersfordelingen som vist i tabellen:

Alder (år)	60	61	62	63	64
Antal	2	8	4	10	3

Tegn et boksplot, og beregn middelværdien.

Begge opgaver er anvendte, fordi opgaven bygger på reference til objekter uden for matematikken. Derudover er begge opgaver også øvelser, i det deres besvarelse på dette niveau bygger på aktivering af standardagtige løsningsmetoder. I D1 hvor det handler om at afkode at der er tale om en logistisk differentialligning som har en standardløsning. I D2 handler det om at have trænet tegning af boksplot for et simpelt observationssæt og beregne middelværdi. Begge dele har karakter af at kunne løses med typiske færdighedsbårne løsningsalgoritmer/-metoder. Fordeling af svar ses i tabel 8.7.

Spørgsmål	N	D1			D1x			D2			D2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	174	91%	9%	0%	97%	1%	2%	52%	41%	7%	56%	37%	6%
Fagidentitet A	96	93%	7%	0%	97%	2%	1%	54%	40%	6%	54%	41%	5%
Fagidentitet B	21	95%	5%	0%	100%	0%	0%	62%	38%	0%	67%	24%	10%
Fagidentitet C	19	74%	26%	0%	95%	0%	5%	32%	58%	11%	63%	26%	11%
Fagidentitet D	38	92%	8%	0%	97%	0%	3%	53%	37%	11%	53%	42%	5%

8.7) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave D1 og D2 i sekvens på 16 opgaver

Det ses at opgave D1 møder meget stor opbakning, idet ikke én respondent afviser opgaven og i det over 90% af alle peger på den som *central*. Det ses dog at der inden for fagidentitet C er signifikant færre (*p=0,023*) der opfatter D1 som central og i stedet kalder den *mulig*. For D2 gælder at få afviser den, men at kun ca. halvdelen kalder den *central*. Der er dog en svag tendens til at folk tilsluttet fagidentitet B er mere tilbøjelige til finde den central, mens folk tilsluttet fagidentitet C er mindre tilbøjelige til det.

Der er givet få frie kommentarer til opgave D1. Blandt dem som har kaldt den central, fremhæver folk først og fremmest vigtigheden af emnet ”differentialligninger”. En enkelt har afvist den som eksamensopgave og begrunder med »*Jeg synes opgaven er formuleret for "matematisk"*« (#157) og kritiserer dermed opgaveformuleringen for at være for meget styret af hensyn til matematikken.

Blandt dem som karakteriserer opgaven som *mulig* tilkendegiver et par stykker at emnet differentialligninger er vigtigt, men at den logistiske differentialligning ikke er det. Dertil skrives følgende:

> »Opgaver af denne type har mistet deres legitimitet, da elever råder over CAS-værktøjet. Igen abe-matematik.« (Respondent #152)
>
> »Opgaven er for svær.« (Respondent #93)

Det første citat bekræfter intentionen i opgaven, nemlig at den er en *øvelse*. Tilsammen viser de to citater dog, at der er rum for forskellig opfattelse af opgaven - om ikke fra et identitetssynspunkt, så fra et niveaumæssigt.

Blandt respondenter der har kaldt opgave D2 for *central* tilkendegiver en del at opgaven er for let, mens andre kalder den »*kedelig*« men nødvendig »*af hensyn til andre fag og almindelig dannelse*« (#41). Blandt dem som har kaldt D2 for *mulig* (men altså *ikke central*) er der især kritik af boksplot-begrebet. Enten generelt eller måden det indgår i opgaven på (intet at sammenligne med, for lille datasæt, ingen fortolkning af det, mv.). Og blandt de få der helt afviser opgaven, kan man bl.a. finde den frie kommentar »*Samfundsfag er det egnede sted for den slags opgaver.*« (#94).

I et uddybende spørgsmål til de 52 respondenter som har afvist D2 som eksamensopgave, men kaldt den *central* eller *mulig*, tilslutter 62% sig synspunktet ”*Opgaven er for simpel*” og 38% tilslutter sig synspunktet ”*Deskriptiv statistik bør ikke optræde som selvstændigt emne ved eksamen.*”. Det synes altså oplagt at være sådan, at selve emnet deskriptiv statistik vækker visse antipatier hos en del undervisere. Dels af niveaugrunde, men som det ses er det for nogle nok også af fagidentitetsgrunde, hvor de har svært ved at genkende deres fag i emnet.

De to opgaver er åbenlyst øvelser hvor dagsordenen er *færdighedstræning*. Dertil kommer at D1 bygger på *motivation* idet spørgsmålet er meningsfuldt, om end ingen nogensinde i praksis ville bede om svaret på det (altså ikke *service*), mens D2 bygger på *illustration*. Situationen og især det stillede spørgsmål er så åbenlyst tilrettelagt efter matematikfagets behov, at ikke engang rammen om opgaven synes at være styret af hensyn til ”noget” uden for faget.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.8.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave D1	3	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0
Opgave D2	3	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0

8.8) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne D1 og D2

8.1.2 Rene matematikopgaver

De øvrige fire par af opgaver i sekvensen er alle kategoriseret som ”rene”. Det vil sige at opgaven alene handler om objekter fra matematikkens egen verden. Der vil under gennemgangen være enkelte af opgaverne om hvilke deres karakterisering som værende rene bliver diskuteret.

Som for de anvendte opgavers vedkommende er også de rene inddelt i fire par, hvor hvert par er konstrueret ud fra en forestilling om en principiel ensartethed i de to opgavers grundlæggende karakteristik. De fire par er således konstrueret i følgende kategorier:

E. *Ren øvelse*. Her tænkes på en opgave der tester en velkendt matematisk løsningsalgoritme.
F. *Rent problem*. Her tænkes på en opgave, som ikke kan løses ved triviel aktivering af løsningsalgoritme, men forudsætter en selvstændigt struktureret løsningsproces.
G. *Bevisopgave*. Her tænkes på en opgave som handler om at gennemføre beviset for en sætning i klassisk "definition-sætning-bevis"-forstand.
H. *Tankepusleri*. Her tænkes på en opgave, som ikke ligner klassiske matematikopgaver, men som er designet for at løseren skal tænke på en matematisk måde.

Opgavepar E: Rene øvelser

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 1 og 16 i opgavesekvensen:

E1: Ren øvelse 1 (1)	**E2: Ren øvelse 2 (16)**
Bestem integralet $\int (2x-1)^6 dx$.	I trekant *ABC* er $a = 10$, $b = 15$ og $c = 21$. a. Bestem $\angle A$ b. Bestem arealet af trekant *ABC* c. Bestem længden af medianen m_b.

De to opgaver er oplagt rene, idet der i begge tilfælde er tale om studier af rent matematiske objekter uden den mindste indblanding af verden udenfor matematikken. Begge opgaver er også oplagte øvelser. Opgave E1 kræver aktivering af integration ved substitution og opgave E2 kræver aktivering af cosinus-relationen i spørgsmål a og c, samt arealformlen i spørgsmål b. Løsningen kræver ikke den mindste afvigelse fra meget velkendte løsningsmetoder. Fordelingen af svar ses i tabel 8.9.

Spørgsmål	N[9]	E1			E1x			E2			E2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	175	62%	34%	3%	86%	10%	5%	91%	8%	1%	89%	8%	3%
Fagidentitet A	97	71%	26%	3%	87%	8%	5%	90%	8%	2%	86%	9%	4%
Fagidentitet B	21	48%	48%	5%	81%	14%	5%	90%	10%	0%	90%	10%	0%
Fagidentitet C	19	63%	37%	0%	95%	5%	0%	89%	11%	0%	89%	5%	5%
Fagidentitet D	38	47%	47%	5%	82%	13%	5%	97%	3%	0%	95%	3%	3%

8.9) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave E1 og E2 i sekvens på 16 opgaver

Der ses en stærk enighed om at begge opgaver har en plads i faget, men hvor E2 opfattes som *central* af næsten alle og uden mærkbare variationer mellem de forskellige fagidentiteter, så er synet på opgave E1 noget mere nuanceret. Her er særligt respondenter tilsluttet fagidentitet B og D tilbøjelige til at angive *mulig* frem for *central*, mens respondenter tilsluttet fagidentitet A er mest tilbøjelig til at angive den *central*. For begge opgaver gælder dog, at det overvejende flertal mener at de kan stilles ved en skriftlig eksamen.

[9] For opgave D2's vedkommende er N = 173 for "alle", N = 96 for "Fagidentitet A" og N = 27 for "Fagidentitet D".

Blandt de 60 respondenter som kalder E1 for *mulig*, tilslutter 40% i et uddybende spørgsmål sig synspunktet ”*Man behøver ikke at kunne løse ubestemte integraler selv - det kan lommeregneren klare.*”. Dertil kommer frie kommentarer som »*Integration ved substitution er ikke centralt*« (#140). En række respondenter peger på at CAS-værktøjer er en central faktor i vurderingen af opgaven, om end de er ret uenige om hvilken rolle et sådan værktøj evt. skal spille.

En tilsvarende diskussion finder sted i de frie kommentarer omkring opgave E2, hvor en del respondenter peger på at opgaven er meget nem at løse med et digitalt værktøj som f.eks. GeoGebra. Her kan man også finde et udsagn som følgende fra en respondent der har angivet den som *central*:

> »opgavetypen kan løses uden brug af matematik (cossincalc.com)« (Respondent #50, fag-ID: A)

Hjemmesiden *cossincalc.com* indeholder et værktøj hvor man indtaster tre kendte informationer om en trekant og derpå kan alle andre informationer om den aflæses. Det interessante her er distinktionen mellem ”brug af matematik” og ”uden brug af matematik”. For respondenten er det åbenlyst *måden* svaret på opgaven opnås på der afgør om det er ”med eller uden matematik”, og ikke karakteren af selve spørgsmålet og svaret på det.

De to opgaver har altså deres tyngde placeret i *teori*-dimensionen og med klart fokus på *færdighedstræning*, hvor der så kan føres diskussioner om hvilke færdigheder der faktisk trænes. Dertil kommer at de begge har et element af konventionskendskab, fordi symbolbrugen spiller en betydelig rolle. Dette er tydeligst i opgave E2, hvor der trækkes på en konvention om hvad bestemte bogstaver forventes at betyde - f.eks. en konvention om at ”*a*” dækker over længden af siden overfor vinklen *A* og betydningen af mediannavnet m_b. Dertil begrebskendskab i forhold til begrebet ”median”.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.10.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave E1	3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Opgave E2	3	0	0	0	1	2	0	0	0	0	0	0	0

8.10) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne E1 og E2

Opgavepar F: Rene problemer

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 4 og 2 i opgavesekvensen:

F1: Rent problem 1 (4)	**F2: Rent problem 2 (2)**
En funktion *f* er bestemt ved $$f(x) = x^3 + 6x^2 + k\ ,$$ hvor *k* er et tal. Bestem de værdier af tallet *k*, for hvilke grafen for *f* har netop to skæringspunkter med førsteaksen.	Hvad skal forholdet mellem højde og radius i en cylinder med kendt volumen være, for at forholdet mellem cylinderens samlede overflade (endeflader inklusivt) og rumfang bliver mindst muligt?

De to opgaver er rene, da der ikke henvises til objekter udenfor matematikken. Det kan naturligvis diskuteres for begrebet ”cylinder”, der måske nok kunne lede tankerne hen på praktiske forhold. Men som opgaven står, er der tale om den rene matematikfigur kaldet en ”lukket cylinder”. At de to opgaver er problemer kan ses af, at ingen af dem kan løses ved aktivering af en umiddelbart velkendt løsningsalgoritme. Der skal så at sige tænkes grundigt over vejen til løsningen.

Fordelingen af svar ses i tabel 8.11.

Spørgsmål	N	F1			F1x			F2			F2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	174	78%	21%	1%	91%	3%	5%	52%	37%	11%	58%	34%	8%
Fagidentitet A	97	79%	20%	1%	92%	2%	6%	54%	35%	10%	55%	35%	9%
Fagidentitet B	21	71%	24%	5%	86%	14%	0%	48%	38%	14%	76%	19%	5%
Fagidentitet C	19	84%	16%	0%	95%	5%	0%	58%	37%	5%	74%	26%	0%
Fagidentitet D	38	76%	24%	0%	92%	0%	8%	45%	42%	13%	47%	42%	11%

8.11) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave F1 og F2 i sekvens på 16 opgaver

Opgave F1 bliver stort set ikke afvist og et stort flertal kalder den *central*. For opgave F2 er der et lille mindretal der afviser den og omtrent halvdelen der kalder den *central*. For opgave F1 ses at afvisningen af den er marginalt stærkere blandt respondenter tilsluttet fagidentitet B, mens den er marginalt mere accepteret blandt respondenter tilsluttet fagidentitet C. Dette er ikke overraskende. Samme billede ses for opgave F2, som dog også i marginalt højere grad afvises af respondenter tilknyttet fagidentitet D. Der er nogenlunde enighed om at F1 kan stilles ved eksamen, med en marginal skepsis blandt tilsluttede til fagidentitet B. For F2 er der langt større skepsis. Den er dog markant mindre blandt tilsluttede til fagidentitet B og C, end blandt fagidentitet A og D.

Blandt de 36 respondenter der angav at F1 var *mulig*, tilsluttede 50% sig, som begrundelse for fravalget af *central*, udsagnet ”*Funktionsanalyse er god træning, men ikke en hovedpointe*” mens 33% tilsluttede sig udsagnet ”*Funktionsanalyse er vigtigt i matematik, men denne opgave er for svær.*”. Der er altså her en opsplitning på om det er identitet eller niveau der begrunder synspunktet.

Ser man opgave F2, angives følgende to frie kommentarer fra respondenter der har angivet at de finder opgaven *central*:

> »Da maskinerne kan "regne alt" er den menneskelige del af den matematiske behandling af et problem at oversætte problemet til matemtik og fortolke maskinens løsning.... derfor er opgaven central« (Respondent #168)
>
> »opgaven er for svær - volumen skal angives f.eks. 2 liter og højden og radius skal have et variabelnavn og der skal være et indledende spørgsmål: udtryk h ved r« (Respondent #142)

Det første citat udtrykker formentlig et gennemgående argument for opgavetypen. Løsningen kan simpelthen ikke overtages af en maskine, uden at eleven laver en meget høj grad af forarbejde selv. Det andet citat udtrykker en anden indvending som kommer fra mange respondenter, uanset hvordan de har vurderet opgaven. Den er meget svær at gå til, fordi der ikke optræder hverken variabelnavne, tal eller formler i opgaveformuleringen. I dette tilfælde vil respondenten tydeligvis gerne have opgaven gjort mere anvendelsesorienteret (ellers var der næppe enhed på volumenet).

I et uddybende spørgsmål til de 65 respondenter der har angivet at opgaven er *mulig*, har 58% tilsluttet sig som begrundelse for at den ikke er central, at ”*Det er meget svært for mange elever at oversætte tekst til matematik*”. Blandt de 19 der har afvist opgaven, tilslutter 68% sig begrundelsen ”*Opgaven er for svær til gymnasieniveuaet*”. Der er altså især betænkeligheder ved niveauet i opgaven og graden af problemløsning der skal aktiveres.

Der er dog 82 respondenter som har angivet at opgaven er *central* og mulig som eksamensopgave. Af disse har 79% tilsluttet sig begrundelsen ”*Det er vigtigt at eleven kan oversætte fra begreber til formler*”, 76% har tilsluttet sig ”*Opgaven kræver at eleven kan tænke matematisk selv*” og 74% tilslutter sig ”*Det er vigtigt at eleven selv opstiller formeludtryk*”. Dette tyder altså på at respondenterne der har svaret dette, faktisk lægger vægt på netop de egenskaber som opgaven var tiltænkt.

Overordnet set er de to opgaver altså i høj grad problemer der kræver særlige løsningsveje. For F1’s vedkommende ligger fokus nok en smule mere på *teoriforståelse*, i det et godt kendskab til teorien for funktioner - især polynomier - er i centrum. For F2’s vedkommende er der udover et grundlæggende problemfokus, også stor vægt på *begrebskendskab*. Der er mange begreber i opgavefomuleringen, som skal oversættes til formler og anden matematisk praksis.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.12.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave F1	0	2	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Opgave F2	0	3	0	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0

8.12) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne F1 og F2

Opgavepar G: Bevisopgaver

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 6 og 8 i opgavesekvensen:

G1: Bevisopgave 1 (6)	**G2: Bevisopgave 2 (8)**
Bevis at hvis to funktioner f og g er differentiable, da er også summen af de to funktioner en differentiabel funktion og dens differentialkvotient er givet ved $(f+g)' = f' + g'$. Ved summen af to funktioner forstås at for alle x gælder at: $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	Definition: En vinkelhalveringslinje er en linje der deler en vinkel i en trekant i to lige store vinkler. Definition: En trekants indskrevne cirkel er en cirkel der netop har alle tre sider i trekanten som tangenter. Bevis at vinkelhalveringslinjerne i en trekant skærer hinanden i ét bestemt punkt og at dette punkt netop er centrum for trekantens indskrevne cirkel.

Begge opgaver er klassiske bevisopgaver, om end G1 adskiller sig fra G2 ved at være en del af pensum i det eksisterende gymnasium, mens G2 er et mere perifert bevis, som man almindeligvis kan forvente eleven ikke er stødt på før. De to opgaver adskiller sig altså substantielt ved at være fremstilling af kendt stof overfor det selvstændigt at kunne igangsætte og udføre et bevis.

Fordelingen af svar ses i tabel 8.13.

Spørgsmål	N	G1			G1x			G2			G2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	174	66%	28%	7%	16%	79%	5%	34%	59%	6%	10%	82%	7%
Fagidentitet A	97	67%	27%	6%	14%	81%	5%	34%	59%	6%	13%	82%	5%
Fagidentitet B	21	48%	29%	24%	5%	90%	5%	29%	67%	5%	10%	86%	5%
Fagidentitet C	19	84%	11%	5%	21%	74%	5%	53%	42%	5%	11%	89%	0%
Fagidentitet D	38	63%	37%	0%	26%	71%	3%	29%	63%	8%	5%	76%	18%

8.13) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave G1 og G2 i sekvens på 16 opgaver

Overordnet set er der ikke stemning for afvisning af nogen af de to opgaver. Et pænt flertal mener at G1 er *central*. Dette er særligt tydeligt blandt respondenter der har tilsluttet sig fagidentitet C, mens billedet for de som har tilsluttet sig fagidentitet B er signifikant ($p<0.01$) mere skeptiske. Her afviser hver fjerde opgaven. Opgave G2 synes også at blive fundet en smule mere central blandt respondenter tilsluttet fagidentitet C.

Den generelle stemning for begge opgaver synes at være, at de ikke hører til ved en skriftlig eksamen. Ved opgave G2 er billedet forholdsvis ensartet inden for de forskellige fagidentiteter, mens det ved G1 er et noget mere broget billede. Her er næsten alle respondenter tilsluttet fagidentitet B imod, mens et pænt mindretal indenfor fagidentiteterne C og D ikke er afvisende.

I et opfølgende spørgsmål til de 126 respondenter som havde svaret central eller mulig om G1, men afvist den som eksamensopgave, tilslutter 60% sig synspunktet ”*Bevisgang hører ikke hjemme i skriftlig eksamen*” og 71% tilslutter sig ”*Bevisgang hører til i mundtlig eksamen*.”. Modstanden mod at denne for mange ellers centrale opgave ved skriftlig eksamen, synes altså at være en holdning til at bevisgang som aktivitet hører til mundtlig matematik. Blandt de 28 der har tilkendegivet at opgaven bør kunne stilles, tilslutter 79% sig synspunktet ”*Bevisgang er centralt for matematikfaget*” og 57% tilslutter sig ”*Bevisopgaver vil være en tiltrængt fornyelse af skriftlig eksamen*”. I en vis forstand kan skellet mellem om en opgavetype bør stilles skriftligt eller om den alene skal behandles mundtligt, godt vise lidt om hvor stor vægt man reelt lægger på opgaven. Skellet er derfor ganske afgørende i dette tilfælde.

Opgave G2 bliver generelt afvist som eksamenspotentiale. I de frie kommentarer er der argumenter som »*Hører til ved mundtlig eksamen.*« (#40), »*Er for perifert et emne til at kunne komme i en skriftlig prøve*« (#1) og »*Altså: Du overvurderer potentialet helt vildt.*« (#66). Altså argumenter der går på formen (mundtlig frem for skriftlig), på emnet (geometri fylder ikke nok) og på niveauet (for svært). Der falder dog også frie kommentarer for dem der ser positivt på G2 som eksamensopgave:

»opgaven er god fordi den viser matematik i en nøddeskal: definition, sætning og bevis i simpel overskuelig udgave. man skal dog sikre at opgaven bliver valgt så langt ude fra almindeligt kendt stof, at der ikke vil være elever der tilfældigvis har særligt forhåndskendskab til teorien..« (Respondent 168, fag-ID: C)

»Til opgave G2: Beviset har en passende sværhedsgrad til skriftlig eksamen. Til opgave G1: Beviset er for svært / for tidskrævende uden hjælpemidler. Med hjælpemidler kan man bare henvise til bogen« (Respondent 83, fag-ID: A)

Det første citat viser at disse to opgaver hos en vis gruppe af respondenter rammer noget, som virkeligt passer til deres fagidentitet. Begge citater viser dog også en bekymring for at opgavetypen kan favorisere nogen ved mere eller mindre tilfældigheder, samt at der kan være nogle niveaumæssige sider af sagen - altså ikke ren identitet.

Overordnet set har begge opgaver stor tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse*. Dertil kan G1 siges at have tyngde i *teoriforståelse*, fordi man skal have en vis indsigt i teorien om funktioner for at gå til opgaven og dertil lidt vægt i *færdighedstræning*, fordi beviset almindeligvis er kendt stof. G2 har derimod en vis tyngde i *begrebskendskab*, fordi opgaven i første omgang kræver forståelse af en række begreber. Dertil lidt tyngde i problemløsning, fordi det er højst uklart hvordan man skal gribe opgaven an.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.14.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave G1	1	0	3	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Opgave G2	0	1	3	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0

8.14) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne G1 og G2

Opgavepar H: Tankepuslerier

Følgende to opgaveformuleringer optrådte som nr. hhv. 14 og 10 i opgavesekvensen:

H1: Tankepusleri 1 (14)

Den kommutative lov for multiplikation siger at:

$$x \cdot y = y \cdot x$$

Et eksempel på en *udvidet* kommutativ lov er:

$$28 \cdot 41 = 14 \cdot 82$$

For hvilke par af to-cifrede tal gælder den udvidede kommutative lov.

H2: Tankepusleri 2 (10)

Bevis at et spil kryds og bolle altid ender uafgjort, hvis begge deltagere spiller optimalt.

Regler for kryds og bolle:

- Der spilles på et bræt med 3x3 felter.
- De to deltagere sætter efter tur hhv. et kryds (X) eller en bolle (O) i et ledigt felt. Spilleren med X starter.
- Får en spiller tre af sit tegn på stribe (lodret, vandret eller diagonalt) har spilleren vundet.
- Er alle ni felter fyldt ud, uden at en spiller har vundet, ender spillet uafgjort.

Disse to opgaver kaldes ”tankepuslerier” fordi de på den ene side ikke ligner klassiske spørgsmål der stilles i matematik (dette gælder mere for H2 end for H1). På den anden side bygger besvarelsen af dem på ræsonnementer af klart matematisk art. Om opgave H2 er en ”ren opgave” kan naturligvis diskuteres, alt den tid at den handler om et spil der eksisterer uden for matematikken. Men da spillet kan opfattes som en matematisk struktur i sig selv, regnes opgaven her for at være ”ren”.

Fordelingen af svar ses i tabel 8.15.

Spørgsmål	N	H1			H1x			H2			H2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	174	10%	78%	13%	14%	80%	6%	9%	78%	13%	6%	84%	9%
Fagidentitet A	97	7%	80%	13%	15%	79%	6%	6%	81%	13%	5%	85%	9%
Fagidentitet B	21	14%	71%	14%	14%	71%	14%	5%	81%	14%	10%	86%	5%
Fagidentitet C	19	26%	63%	11%	26%	74%	0%	21%	74%	5%	11%	84%	5%
Fagidentitet D	38	5%	82%	13%	5%	89%	5%	11%	71%	18%	5%	82%	13%

8.15) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave H1 og H2 i sekvens på 16 opgaver

Svarfordelingen på de to opgaver er meget ensartet. Et lille mindretal afviser opgaverne og et lillemindretal finder dem centrale. Begge opgaver opfattes altså i hovedsagen at blive opfattet som noget man godt kan lave i matematik, men ikke som noget identitetsbærende. Der synes dog indenfor gruppen af respondenter tilsluttet fagidentitet C at være en større tilbøjelighed til at angive de to opgaver som centrale og for opgave H1’s vedkommende også at acceptere den som mulig eksamensopgave.

Blandt de 135 respondenter der karakteriserede H1 som *mulig*, tilsluttede 52% sig i et uddybende spørgsmål begrundelsen ”*Opgaven træner evnen til at tænke logisk, men er ikke vigtig for matematik.*”, 28% tilslutter sig begrundelsen ”*Det afgørende er de teknikker der skal bruges, for at svare på opgaven*” og 24% tilslutter sig begrundelsen ”*Opgaven præsenterer nogle begreber, som kan bruges i det centrale stof.*”. Endvidere fremføres frie kommentarer som »*Glimrende ide at indføre lidt talteori.*« (#83), »*Kan kun bruges elever med standpunkt 10+ - 12*« (#1) og »*Eleverne ville ligge døde i gangene.*« (#51). Alt sammen reaktioner der udsiger, at denne form for ”tankepuslerier” sagtens kan indtænkes i faget, men at det ikke er her man almindeliges genkender det som virkelig betyder noget for en i faget. Samtidig ligger der et element af niveau-overvejelser også.

Enkelte respondenter kommenterer på opgavens formulering. F.eks.: »*Mudrer det centrale begreb "kommutativ"*« (#194), »*Opg H1: Udvidet kommutativ er en tåbelig regel, der bygger på det konkrete talsystem og ikke på tal som matematisk begreb.*« (#61), »*Jeg kan ikke se at opgaven har noget med den kommutative lov at gøre.*« (#63) og »*Opgaven er meget uklart formuleret. man kan ikke definere noget med et eksempel*« (#133). Disse udsagn er alle eksempler på respondenter der har følt deres fagidentitet krænket af opgavens måde at fremstille et problem. Enten behandlingen af begrebet ”kommutativ” eller måden at ”definere” på. Her bliver fagidentiteten altså stærkere, end de udbytter som ovenfor nævnes som potentialer ved opgaven.

Ser man i stedet på uddybende spørgsmål til opgave H2, så tilslutter 74% af de 151 respondenter der har kaldt opgaven *central* eller *mulig*, sig synspunktet ”*Opgaven træner logisk tænkning*”, mens 61% tilslutter sig »*Opgaven udfordrer eleven på hvornår noget er bevist*«. Der er altså også her stor opbakning til det opgaven fører med sig, mere end til det problem den omhandler.

Opgaverne har begge deres væsentligste tyngde i tyngdepunktet *ræsonneret retfærdiggørelse*. Dertil kommer at H1 har tyngde i *teoriforståelse*, fordi der er tale om behandling af en teoretisk problemstilling og en smule tyngde i konventionskendskab, fordi opgaven er båret meget af notationen. H2 har derimod lidt *problemløsning* over sig, fordi det er særlig vanskeligt at gå i gang med opgaven.

Samlet vurderes opgavernes identitetsbidrag som vist i tabel 8.16.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Opgave H1	0	0	2	2	0	1	0	0	0	0	0	0	0
Opgave H2	0	2	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8.16) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne G1 og G2

8.2 Syn på "anvendte opgaver"

Hvor opgavesekvensen i afsnit 8.1 havde til formål at forsøge at analysere respondenternes reaktioner på opgaver i bred forstand, bl.a. for at afklare identitetsbårne reaktioner i spændet mellem "ren overfor anvendt", vil dette afsnit stille skarpt på anvendte matematikopgaver.

Respondenterne blev bedt om at forholde sig vurderende til først en serie på fire opgaver som alle faktisk har været stillet ved skriftlig eksamen på A-niveau efter 2005 reformen. Formålet med dette var at kortlægge respondenternes syn på disse. Det stillede spørgsmål (idet X gennemløb "første", "andet", "tredje" og "fjerde") og de mulige svar lød som følger:

Spørgsmål "Herunder er det X'ne af fire eksempler på en opgave i "anvendt matematik" fra et tidligere opgavesæt til skriftlig eksamen på A-niveau. Vælg det udsagn som bedst beskriver din opfattelse af opgaven."	
Kortsvar	**Langt svar (fra skemaet)**
Autentisk	"Anvendelsen virker **autentisk** – opgavesituationen afspejler en potentiel virkelig situation."
Kunstig	"Anvendelsen virker **kunstig** – opgavesituationen er en indpakning af en ren matematikopgave."
Uklar	"Anvendelsen er **uklar** – det er ikke klart om opgaven baserer sig på en potentiel anvendelse"

Efterfølgende blev respondenten præsenteret for en stribe opgaver af mere åben art og med fokus på egentlig modellering. Opgaverne var hentet fra det såkaldte "Allerød-forsøg" (Jensen 2007, appendiks E, s. 295ff)) for at understrege, at de rent faktisk *har* været brugt ved prøver og eksamener. Det er altså ikke bare spørgerens vilde fantasi, men afprøvet på rigtige elever. Spørgsmål og svarmuligheder lød som vist herunder (idet X gennemløb "første", "andet", "tredje" og "fjerde"):

Spørgsmål " Herunder vises den X'ne af fire opgaver fra skriftlig terminsprøve/eksamen i "Allerød-forsøget" 2002. Vælg det udsagn som bedst beskriver din opfattelse af opgaven."	
Kortsvar	**Langt svar (fra skemaet)**
Eksamen	"Hvis jeg bestemte form og indhold, kunne en opgave som denne godt forekomme ved skriftlig eksamen på gymnasiets højeste niveau"
Undervisning	"Hvis jeg bestemte, ville en sådan opgave ikke forekomme ved skriftlig eksamen, men den kunne godt indgå i undervisningen."
Afvist	"Hvis jeg bestemte, ville en opgave som denne ikke optræde i forbindelse med matematikfaget."

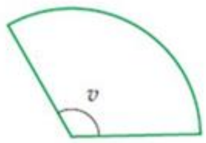
For begge opgaveseriers vedkommende gjaldt, at respondenten blev bedt om at angive om respondenten kunne tilslutte sig en række udsagn om opgaven. I alle otte tilfælde lød spørgsmålet: ”*Afkryds de af følgende udsagn om ovenstående opgave, som du synes at være enig i:*”. Disse vil blive præsenteret sammen med svarene på ovenstående spørgsmål.

8.2.1 Anvendte opgaver i aktuelt eksamenssæt

De fire ”anvendte opgaver” fra aktuelle eksamenssæt vil i denne afhandling blive fremstillet i par, som er nummeret J1 og J2 samt K1 og K2. Opdelingen er foretaget sådan fordi opgaverne J1 og J2 er valgt som nogen hvor tyngden i anvendelsesdimensionen ligger i tyngdepunkterne *motivation/illustration*, mens K1 og K2 er valgt fordi de har deres tyngde i *motivation/service*. Endvidere vil de uddybende udsagn om de enkelte opgaver være nummeret med små bogstaver og der vil således blive refereret til udsagn b om opgave J1 som ”*udsagn J1b*”.

Opgavepar J: Motivation/illustration

De to opgaver lød som følger:

J1:	**J2:**
I perioden 1980-2000 kan antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn beskrives ved modellen: $$f(t) = 297 \cdot 1{,}0679^t,\ \ 0 \leq t \leq 20$$ hvor *f(t)* er antallet af retspsykiatriske patienter under tilsyn til tidspunktet *t* (målt i år efter 1980). a. Bestem fordoblingstiden for *f(t)*. Gør rede for, hvad konstanterne i modellen fortæller om udviklingen i antallet af retspsykiatriske patienter undertilsyn i perioden 1980-2000.	I en have skal anlægges et blomsterbed, der har form som et cirkeludsnit (se figuren).  Det oplyses, at arealet af blomsterbedet som funktion af vinklen *v* (målt i radianer) er: $$A(v) = \frac{200v}{(v+2)^2}$$ Bestem *v*, så arealet af blomsterbedet bliver størst muligt

Opgave J1 vurderes til at have sin tyngde i tyngdepunktet *motivation*. Rammen for situationen er oplagt bestemt af en kontekst, mens indholdet i spørgsmålene alene er styret af rent matematiske hensyn. Det er næppe realistisk at nogen ville stille de spørgsmål i en autentisk parallel til konteksten. Opgave J2 har sin tyngde i *illustration*. Den kontekstuelle ramme om opgaven er drevet af et rent matematisk behov. Det virker helt utænkeligt at nogen vil anlægge et bed med form af et cirkeludsnit med en bestemt omkreds og derfor skal vide hvilken vinkel der gør bedet størst. Hele opgaven er altså alene konstrueret alene af hensyn til matematikken. Svarene fremgår af tabel 8.17.

Spørgsmål	N	J1			N	J2		
Svar	#	Autentisk	Kunstig	Uklar	#	Autentisk	Kunstig	Uklar
Alle	164	52%	43%	5%	163	25%	69%	6%
Fagidentitet A	89	52%	44%	4%	89	24%	70%	7%
Fagidentitet B	21	62%	38%	0%	21	19%	81%	0%
Fagidentitet C	18	33%	61%	6%	18	28%	61%	11%
Fagidentitet D	36	58%	33%	8%	35	31%	66%	3%

8.17) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave J1 og J2 i sekvens af anvendte eksamensopgaver

For opgave J1 synes respondenterne delt på midten over hvor vidt opgaven er *autentisk* eller *kunstig*, med en svag overvægt til *autentisk*. For J2 er der derimod et pænt flertal der finder opgaven kunstig og blot en fjerdedel der finder den autentisk. Der er en svag til tendens til at respondenter tilsluttet fagidentitet B i lidt højere grad finder J1 autentisk og J2 kunstig, mens respondenter tilsluttet fagidentitet C i højere grad finder J1 kunstig.

Som uddybning kunne respondenten tilslutte sig seks udsagn. Svarene ses i tabel 8.18.

Uddybende spørgsmål	Svar på hovedspørgsmål (÷ "uklar")	Alle	Autentisk	Kunstig
a)	Opgaven fremstår mere relevant fordi den handler om retspsykiatrien.	33%	47%	19%
b)	Opgaven burde handle om en eksponentialfunktion, uden reference til retspsykiatri.	7%	1%	16%
c)	Det givne formeludtryk virker som om det er tilfældigt valgt.	16%	5%	29%
d)	Det er vigtigt at der spørges til betydningen af konstanterne	80%	84%	76%
e)	Eleverne burde have udledt udtrykket selv, ud fra data	29%	20%	40%
f)	Opgaven er for nem til matematik på A-niveau.	21%	22%	23%
Ingen svar		3%	0%	3%
N		*164*	*86*	*70*

8.18) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave J1.

En tredjedel af respondenterne tilslutter sig udsagn *J1a* om at den anvendte kontekst er vigtig, mens bare 7% tilslutter sig udsagn *J1b* om at den burde være udeladt. Der er dog markant forskel på tilslutningen til disse to synspunkter mellem dem som finder opgaven *autentisk* og dem som finder den *kunstig*. På samme måde ses, at udsagn *J1c* om at formeludtrykket "virker tilfældig" udpeges som en begrundelse for at kalde opgaven "kunstig".

Der ses et stort flertal for at tilslutte sig udsagn *J1d* om at den model-orienterede fortolkning af konstanterne er vigtig, mens noget færre tilslutter sig *J1e* om at eleven selv skal opstille modellen. Det er dog dobbelt så stor tilslutning til dette blandt de som fandt opgaven kunstig. Endeligt ses af tilslutningen til synspunkt *J1f* at niveau-spørgsmålet betyder noget for et mindretal.

Her følger et par frie kommentarer fra respondenter:

> »Tja, det er jo bare en opgave« (Respondent #192, fag-ID: C)
>
> »Opgaven tester om eleven kan genkende en eksponentiel udvikling og har lært formlen for fordoblingstid. Til dette formål er opgaven god.« (Respondent #37, fag-ID: A)
>
> »Opgaven er efter min mening kunstig men virker autentisk for eleverne, derfor synes jeg alligevel, at det er en god opgave (af de lette på A-niveau)« (Respondent #41, fag-ID: A)

»Opgaven fremstår mere relevant, da den også træner modelleringsaspektet - udover viden om eksponentialfunktioner.« (Respondent #74, fag-ID: A)

De fire kommentarer viser lidt om variationen i synspunkter på opgaver som denne. Den første kommentar giver udtryk for at opgaver er et mål i sig selv, mens indholdet er mindre vigtigt. Den anden giver udtryk for at opgaven egentlig kun har et formål inden for teori-dimensionen, mens tredje respondent mener at indpakningen faktisk betyder noget for eleverne. Endeligt er der den sidste kommentar, som synes at mene at opgaven træner både teoretisk og anvendt matematik.

For de anvendte opgavers vedkommende giver det ikke mening at vurdere selve opgaven i forhold til tyngdepunkter, fordi spørgsmålet om *autentisk* overfor *kunstig* ikke siger noget om respondentens faktiske syn på sagen. Derimod vil nogle af de uddybende spørgsmål kunne indgå i afvejningen. Vurderingen af hvordan tilslutning til de enkelte spørgsmål bidrager til billedet af respondentens identitet, er for opgave J1's vedkommende vist i tabel 8.19. Det bemærkes at ikke alle synspunkter leverer et identitetsbidrag.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Synspunkt J1a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Synspunkt J1b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Synspunkt J1d	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Synspunkt J1e	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0

8.19) Opgørelse over tyngdebidrag fra uddybende spørgsmål til opgave J1.

Fordelingen af tilslutning til de uddybende spørgsmål om opgave J2 fremgår af tabel 8.20.

Uddybende spørgsmål Svar på hovedspørgsmål (÷ "uklar")	Alle	Autentisk	Kunstig
a) Opgaven fremstår mere relevant fordi den handler om et blomsterbed.	28%	63%	18%
b) Opgaven burde handle om at finde funktionsmaksimum uden reference til et blomsterbed	25%	2%	34%
c) Det givne formeludtryk virker som om det er tilfældigt valgt.	40%	15%	48%
d) Eleven burde selv skulle udlede formeludtrykket ud fra givne forudsætninger	20%	15%	19%
e) Der burde stilles mere komplicerede spørgsmål (f.eks. "angiv radius som funktion af vinklen").	12%	15%	12%
f) Opgaven er for nem til matematik på A-niveau.	5%	7%	4%
Ingen svar	10%	15%	10%
N	*163*	*41*	*113*

8.20) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave J2.

Ud fra tilslutningen til *J2a* ses det, at en vis andel af respondenterne mener at opgaven "bliver mere relevant" af den anvendte kontekst, samt at dette i betydelig grad gælder for dem som finder opgaven autentisk. Ligesom for opgave J1 ses også her det omvendte billede i forhold til hvem der helst havde været fri for konteksten (*J2b*). Spørgsmål *J2c* viser, at også for denne opgave findes formeludtrykket "tilfældigt" af mange af de respondenter der har kaldt opgaven "kunstig". Til gengæld er der lille opbakning til forslagene om at problemorientere opgaven - dvs. udsagn *J2d* og *J2e*. Endeligt viser den lille tilslutning til *J2f*, at for lavt niveau ikke synes at spille ind her.

I tabel 8.21 ses hvordan de forskellige uddybende spørgsmål er vurderet som identitetsbidrag, i det udsagnene *J2c* og *J2f* ikke vurderes at bidrage.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Synspunkt J2a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Synspunkt J2b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Synspunkt J2d	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Synspunkt J2e	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8.21) Opgørelse over tyngdebidrag fra uddybende spørgsmål til opgave J2.

Opgavepar K: Motivation/service

De to opgaver lød som følger:

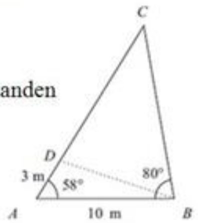
K1:

På figuren ses en skitse af en stålkonstruktion bestående af fire stålstænger. I trekant *ABC* er $\angle A = 58°$ og $|AB| = 10$ m. Stålstangen *BC* danner en vinkel på 80° med *AB*.

a. Bestem længden af *BC*.

Stålstangen *BD* er fastgjort i *D*, således at afstanden fra *A* til *D* er 3 m.

b. Bestem længden af *BD*.



K2:

Der løber vand fra en vandhane ned i et badekar med en hastighed på 0,4 L/s. Bundproppen i badekaret er lidt utæt, så vandet løber samtidigt ud af badekarret med en hastighed, der er proportional med vandmængden i badekarret (målt i L). Det oplyses, at proportionalitetskonstanten er 0,001 s^{-1}

a) Indfør passende variable, og opstil en differentialligning, der beskriver, hvordan vandmængden i badekarret ændrer sig med tiden.

Karakteren af opgave K1 kan være vanskelig at placere. På den ene side kan det opfattes som en opgave med primær tyngde i tyngdepunktet *illustration*, fordi konteksten basalt set ikke spiller nogen rolle for hverken ramme eller indhold. På den anden side kan man støde på følgende udsagn:

> »[…] jeg har en god ven som er smed og jeg har tit… eller ikke tit, men jeg har i flere tilfælde lavet udregninger for ham der minder på mange måder om det her, fordi han skulle lave en konstruktion, en tagkonstruktion eller et eller andet, og ville gerne høre hvordan han skulle skære vinkler til for ender af forskellige… ja, stykker metal, vinkeljern eller lignende, ikke. Så… Så det er faktisk noget der bliver brugt.« (Interviewperson L1)

Hvis man tager dette udsagn alvorligt bliver rammen faktisk realistisk nok, om end det konkrete spørgsmål næppe er det. Og så får opgaven sin tyngde i tyngdepunktet *motivation*. Opgave K2 er også lidt uklar. På den ene side er rammen omkring opgaven lavet så den er filet af hensyn til matematik. På den anden side så kan indholdet i spørgsmålet godt være et realistisk eksempel på at matematik "servicerer" et andet fag, hvilket bl.a. understøttes af følgende udsagn:

> » Det jo en dejlig opgave […], fordi det, det smager jo lidt af… ikke af fysik, men det smager lidt af det på en eller anden led. Der er noget fysik… jo, ja.« (Interviewperson L4)

På den baggrund opfattes opgave K2 her som havende sin tyngde i tyngdepunktet *service*. Respondenternes samlede vurdering af de to opgaver fremgår af tabel 8.17

Spørgsmål	N	K1			N	K2		
Svar	#	Autentisk	Kunstig	Uklar	#	Autentisk	Kunstig	Uklar
Alle	162	34%	56%	10%	162	70%	25%	5%
Fagidentitet A	89	34%	61%	6%	89	71%	25%	4%
Fagidentitet B	20	35%	55%	10%	20	70%	25%	5%
Fagidentitet C	18	39%	44%	17%	18	78%	22%	0%
Fagidentitet D	36	31%	51%	17%	35	66%	26%	9%

8.22) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave K1 og K2 i sekvens af anvendte eksamensopgaver

Overordnet set finder et lille flertal at opgave K1 er *kunstig*, mens et forholdsvist stort flertal finder at opgave K2 er autentisk. Mest bemærkelsesværdigt er det måske nok, at der er meget lille variation mellem grupper af respondenter tilsluttet forskellige fagidentiteter.

I tabel 8.23 er vist fordelingen af svar på uddybende spørgsmål til opgave K1.

Uddybende spørgsmål Svar på hovedspørgsmål (÷ "uklar")	Alle	Autentisk	Kunstig
a) Opgaven fremstår mere relevant fordi den handler om en stålkonstruktion	35%	71%	18%
b) Opgaven burde handle om trigonometri uden reference til en stålkonstruktion	32%	5%	47%
c) Eleven burde selv skulle tegne skitsen	26%	29%	25%
d) Jeg forventer ikke, at sådanne udregninger faktisk foretages på stålkonstruktioner.	23%	7%	29%
e) Opgaven er for nem til matematik på A-niveau	6%	7%	3%
Ingen svar	13%	9%	13%
N	*162*	*55*	*91*

8.23) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave K1.

Billedet for K1 minder om det tilsvarende billede fra J1 og J2. Tilslutningen til *K1a* viser, at tilstedeværelsen af konteksten betyder større relevans for mange af dem der har kaldt opgaven *autentisk*, mens mange af dem som har kaldt den *kunstig* tilslutter sig *K1b* om at de helst var fri for konteksten. Uafhængigt af hvordan opgaven karakteriseres, tilslutter omkring hver fjerde sig synspunkt *K1c* om at eleven selve burde have tegnet skitsen. Et synspunkt der trækker i retning af tyngdepunktet *begrebsforståelse*. Endeligt tilslutter en del af dem der har kaldt opgaven *kunstig* (eller *uklar*) sig synspunkt *K2d* om, at de ikke forventer at opgaven repræsenterer noget realistisk. Det kan i øvrigt bemærkes ud fra tilslutningen til synspunkt *K1e*, at niveauet ikke synes at være afgørende.

Samlet vurdering af identitetsbidrag fra relevante uddybende spørgsmål til K1, ses i tabel 8.24.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Synspunkt K1a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Synspunkt K1b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Synspunkt K1c	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0

8.24) Opgørelse over tyngdebidrag fra uddybende spørgsmål til opgave K1.

I tabel 8.25 er vist fordelingen af svar på uddybende spørgsmål til opgave K2.

Uddybende spørgsmål **Svar på hovedspørgsmål (÷ "uklar")**	**Alle**	**Autentisk**	**Kunstig**
A. Opgaven fremstår mere relevant fordi den handler om at fylde et badekar	49%	61%	20%
B. Opgaven burde handle om en differentialligning uden reference til et badekar	4%	2%	13%
C. Opgaven repræsenterer måder at anvende matematik på i andre fag	47%	52%	33%
D. Opgaven bygger på relevante modelleringsovervejelser	70%	72%	63%
E. Eleven burde anvende den fundne differentialligning til noget	38%	39%	33%
F. Eleven burde løse den fundne differentialligning	21%	21%	20%
G. Opgaven er for nem til matematik på A-niveau	1%	1%	3%
Ingen svar	4%	3%	5%
N	*162*	*114*	*40*

8.25) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave K2.

Billedet her er ikke så meget anderledes end for de foregående tre opgaver. Blandt dem der finder opgaven autentisk, tilslutter flertallet sig synpunkt *K2a* om at konteksten gør den mere relevant. Det er dog i denne situation kun meget få der tilslutter sig synspunkt *K2b* om at det matematiske indhold skulle være fremstillet uden kontekst. Dertil kommer at omkring halvdelen tilslutter sig *K2c* om at opgaven repræsenterer en måde at bruge matematik i andre fag og et flertal tilslutter sig *K2d* om at opgaverne bygger på relevante modelleringsovervejelser. Det synes altså i denne opgave som om respondenterne ser noget mere modellering, end de gjorde i de forrige tre.

Der falder også en række frie kommentarer til opgaven - her et udvalg:

> »Jeg tror nu heller ikke at der er nogle der ville beregne en sådan opgave i virkeligheden - på den måde er den kunstig. Men i forhold til de tidligere opgaver ligner den mere noget fra virkeligheden.« (Respondent #104)
>
> »Opgaven tester netop modelaspektet i matematik - og hører til i den svære ende, hvor man både skal læse tekst og lave en model.« (Respondent #28)
>
> »Den er ikke decideret for nem, men de fleste må forventes at kunne løse den.« (Respondent #115)
>
> »opgaven er svær!« (Respondent #191)
>
> »Det er jo en fysikopgave.« (Respondent #141)

Respondenten bag den første kommentar har kategoriseret de foregående tre opgaver som *kunstige* fulgt af kommentarer som *»[…] jeg synes den er kunstig fordi jeg tvivler på at der er nogle der skal anlægge et blomsterbed, der rent faktisk anvender denne type matematik.*« og »[…] *jeg [kan] ikke se en pointe med at det handler om en stålkonstruktion.*«. Ved den sidste opgave mener respondenten for så vidt det samme, men synes alligevel at det minder lidt mere om noget fra virkeligheden. Den anden kommentar synes til gengæld at mene at opgaven faktisk repræsenterer egentligt modelarbejde. Så opgavens art er ikke helt entydig. Helt entydig synes niveauet heller ikke at være, når man sammenligner tredje og fjerde kommentar, der angiver opgaven som henholdsvis "nem" og "svær". Endeligt er sidste kommentar en bemærkning der forekommer flere gange i den samlede undersøgelse, hvor respondenter mener at opgaven er en fysikopgave, hvor det kan underforstås at den så ikke er en matematikopgave. Det er i hvert fald sigende hvor ofte opgaver der læner sig op af fysik får denne dom, sammenlignet med opgaver der læner sig op af f.eks. biologi og samfundsfag.

I tabel 8.26 sammenfattes identitetsbidrag fra de uddybende synspunkter respondenterne kunne tilslutte sig. Nogle synspunkter er udeladt da de er vurderet til ikke at bidrage med tyngde. Synspunkterne *K2e* og *K2f* angiver forslag til hvordan konkrete færdigheder kunne være en del af opgaven.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Synspunkt K2a	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
Synspunkt K2b	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Synspunkt K2d	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
Synspunkt K2e	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Synspunkt K2f	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

8.26) Opgørelse over tyngdebidrag fra uddybende spørgsmål til opgave K2.

8.2.2 Modelleringsopgaver fra forsøgs-prøvesæt

De fire ”modelleringsopgaver” stammer som sagt fra Allerød-forsøget, som var et forsøg med at gøre modelleringskompetence til omdrejningspunktet i en matematikundervisning. Forsøget gennemførtes på obligatorisk niveau (B-niveau) i en klasse på matematisk linje under 1988-reformen. De fire opgaver er grupperet i to par kaldet M1/M2 og N1/N2. De to M-opgaver er kendetegnet ved at være meget åbne problemstillinger, hvor afgrænsningen af svaret i sig selv er en del af opgaven. De to N-opgaver er semi-åbne problemstillinger, hvor svaret i højere grad er afgrænset af problemstillingen og hvor det er mere veldefineret hvad det er svaret skal på opgaven skal leve op til.

Også for disse opgaver er der stillet en række uddybende synspunkter som respondenterne har kunnet tilslutte sig.

Opgavepar M: Helt åbne problemstillinger

De to opgaver lød som følger:

M1:	M2:
Modellér hvor mange elevatorer der er brug for i et stormagasin med mange etager.	*Modellér hvor langt fremme ad vejen der skal være fri bane for at man sikkert kan overhale.*

De to opgaver er åbne modelleringsopgaver fordi det søgte svar kun er meget vagt karakteriseret. forskellige elever vil kunne komme til vidt forskellige svar, som alle er lige rigtige. Samtidig er løsningsmetoderne også helt åben. Det er med andre ord en meget udfoldet modelproces der skal til, for at kunne besvare de to opgaver. Respondenternes vurdering af opgaverne fremgår af tabel 8.27.

Spørgsmål	N	M1			N	M2		
Svar	#	Eksamen	Undervisning	Afvist	#	Eksamen	Undervisning	Afvist
Alle	161	9%	76%	15%	159	24%	65%	11%
Fagidentitet A	89	8%	76%	16%	88	23%	66%	11%
Fagidentitet B	20	15%	75%	10%	20	30%	70%	0%
Fagidentitet C	18	11%	72%	17%	18	28%	44%	28%
Fagidentitet D	34	9%	76%	15%	33	21%	73%	6%

8.27) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave M1 og M2 i sekvens af modelleringsopgaver

Det første der bør bemærkes er hvor relativt få der umiddelbart er helt afvisende overfor de to opgaver som noget der kan optræde i matematikfaget. Særlig for M2 er afvisningen dog større blandt respondenter tilsluttet fagidentitet C og helt væk for fagidentitet B. Langt de fleste respondenter kan godt se opgaven som en del af deres undervisning, men færre opfatter det som noget der kan optræde ved en eksamen. Modstanden mod at gøre det til eksamensopgave er større for M1 end for M2

Fordelingen af respondenternes tilslutning til en række uddybende udsagn om M1 ses i tabel 8.28.

Uddybende spørgsmål **Svar på hovedspørgsmål**	**Alle**	**Eksamen**	**Underv.**	**Afvist**
Stormagasiners elevatorer er irrelevante at undersøge i matematik	1%	0%	0%	4%
Det er for uklart hvad det matematiske indhold i opgaven er	59%	20%	57%	92%
Det er for uklart hvad eleven forventes at svare på opgaven	70%	33%	71%	88%
Det er spændende, at eleven selv skal finde ud af at komme i gang med opgaven.	34%	67%	34%	17%
Det er spændende, at eleven selv skal afgrænse hvad der er vigtigt i modellen	42%	67%	43%	17%
Der er for lidt tid ved en skriftlig eksamen til en sådan opgave	60%	33%	66%	46%
Ingen svar	3%	20%	2%	0%
N	*161*	*15*	*122*	*24*

8.28) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave M1.

Det er angiveligt ikke opgavens genstand ”elevatorer i stormagasiner”, som respondenter har problemer med. Og det er selvom man i dette tilfælde ikke kan forklare det med at konteksten alene er en indpakning, for flertallet finder det uklart hvad det matematiske indhold i opgaven er. Dertil kommer at markant flertal mener det er uklart hvad eleven forventes at svare på opgaven. Og det er jo netop meningen - eleven skal selv afgrænse hvad der er et fornuftigt svar. Det er dog kun knapt halvt så mange der angiver at disse uklarheder er ”spændende”. Som frie kommentarer ses f.eks.:

> »Hvordan lyder hele opgaven?« (Respondent #53)
>
> »En svag elev stilles meget dårligt med en sådan opgaveformulering« (Respondent #161)
>
> »Minder for meget om de opgaver jeg selv fik i 9 klasse eksamen - problemregning« (Respondent #115)
>
> »Jeg véd ikke selv, hvordan jeg skulle løse opgaven, men det kunne da være sjovt at diskutere. Jeg tror imidlertid ikke eleverne vil lære noget matematik af det. Hvis man kan noget matematik i forvejen, kan man måske finde på en model.« (Respondent #94)

Det første udsagn repræsenterer en kritik der også tidligere er set af åbne opgaver, nemlig det synpunkt at ”der må mangle noget”. Det synes påviseligt at en del respondenter har svært ved at acceptere matematikopgaver hvor det er uklart hvad man umiddelbart skal gribe fat i og endnu sværere hvis det er uklart hvordan svaret skal se ud. De to næste udsagn viser endnu engang uenigheder om niveauet i en sådan opgave.

Det sidste udsagn er ganske interessant fra et identitetsperspektiv, fordi respondenten tydeligvis forbinder det at kunne matematik med noget meget bestemt, som ikke dækker det at finde på en model. Matematik er så at sige det man kan før man laver en model. Og derfor ser respondenten heller ikke nogen mulighed for matematiklæring i opgaven.

I tabel 8.29 ses fordelingen af respondenternes tilslutning til uddybende udsagn om opgave M2:

Uddybende spørgsmål Svar på hovedspørgsmål	Alle	Eksamen	Underv.	Afvist
Bilers overhaling er irrelevant at undersøge i matematik	4%	0%	4%	12%
Det er for uklart hvad det matematiske indhold i opgaven er	33%	11%	34%	76%
Det er klart hvad eleven skal svare på	25%	42%	20%	12%
Det er klart hvordan opgaven gribes an	9%	16%	6%	12%
Det er spændende, at eleven selv skal afgrænse hvad der er vigtigt i modellen.	60%	84%	60%	6%
Der er for lidt tid ved en skriftlig eksamen til en sådan opgave	54%	34%	64%	35%
Ingen svar	5%	5%	5%	6%
N	*159*	*38*	*104*	*17*

8.29) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave M2.

Også for opgave M2 synes uklarheden i hvad det matematiske indhold er at spille en rolle for at henvise opgaven alene til undervisningen eller helt at afvise den. Det forekommer altså at det at gå til en opgave med et uklart matematikindhold spiller en mindre væsentlig rolle for en del respondenter. Det er imidlertid behovet for en selvstændig afgrænsning som mange respondenter finder spændende ved opgaven, især de som accepterer den som eksamensopgave. Så der er altså også en gruppe der synes at dette er centralt nok for faget til at blive testet ved skriftlig eksamen. Endeligt kan det bemærkes at det for M2 - såvel som M1 - er en relativt stor bekymring at der er for lidt tid ved en skriftlig eksamen.

Blandt de frie kommentarer fremhæves følgende:

> »Opgaverne bør ikke være så uklart formuleret ved den skriftlige eksamen. Hvis dette skal være en matematikopgave skal der være flere oplysninger.« (Respondent #147)
>
> »Hvis en sådan opgave optrådte ved skriftlig eksamen, kunne man forestille sig færre opgaver (og måske internetadgang), og vurderingsgrundlaget ville være elevens evne til ræsonnement og modellering. Dette siger jeg ud fra forestillingen om, at en sådan opgave er mere "autentisk" og bedre afspejler hvordan man (kan) arbejde(r) i matematik, i stedet for de "skabelon-opgaver" som eleverne præsenteres for pt. hvor der reelt intet ræsonnement foregår, det handler mest om at kunne huske formler og fremgangsmåder udenad.« (Respondent #34)
>
> »I den skriftelige eksamen på Fysik A er der opgaver af denne type hvor eleverne selv skal finde på tal og opstille betingelser. Det er min erfaring at eleverne er meget utrykke ved den slags opgaver og har meget svært ved dem. På den ene side synes jeg de er for svære men på den anden side synes jeg de er relevante. Vi kan måske blive bedre til at undervise eleverne i den slags opgaver. Desuden synes jeg de er svære at rette og bedømme.« (Respondent #104)

Den første kommentar understøtter påstanden ovenfor om, at der er en gruppe respondenter der ikke genkender deres fag i opgaver som kræver for mange (ekstra-matematiske) afgrænsninger. De to øvrige citater viser at der findes respondenter som ser positivt på denne opgavetype, dog med lidt varierende entusiasme. Den første af respondenterne ser det som et brugbart alternativ til de aktuelle færdighedsbaserede ("huske formler og fremgangsmåder udenad") opgaver. Den anden mener med erfaring fra skriftlig fysik-eksamen at opgavetypen på den ene side er relevant, men på den anden side rummer store udfordringer for dels eleverne, men også for lærerne. Her kolliderer fagidentitet altså potentielt med mere praktiske hensyn.

I tabel 8.30 ses vurderingen af hvilket identitetsbidrag opgave M1 og M2 leverer:

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Opgave M1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
Opgave M2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0

8.30) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne M1 og M2

Opgavepar N: Semi-åbne modelleringsopgaver

De to opgaver lød som følger:

N1:	N2:
Du skal udforme et spil, hvor gevinsten er penge, og hvor der skal være mindst tre forskellige muligheder for gevinst. *Spillet skal udformes således, at sandsynligheden for gevinst, samt gevinstens størrelse er så tillokkende i forhold til prisen for deltagelse i spillet, at spilleglade har lyst til at prøve. Men samtidig skal udbyderne af spillet have udsigt til et pænt overskud, når spillet er afsluttet.*	*Et stakit af en vis længde skal anvendes til at lave en lukket indhegning. Indhegningen skal have form som en trekant, hvor en mur udgør den ene side, og hvor de to andre sider er lavet ved hjælp af stakittet.* *Hvordan skal stakittet deles, og hvordan skal de to sider med stakit anbringes, så indhegningen areal bliver så stort som muligt?*

De to opgaver er semiåbne modelleringsproblemer, fordi målet for løsningsprocessen er rimelig velbeskrevet i opgaven, men måden opgaven skal løses på er ganske uklar. Der er dog her en gradsforskel idet opgave N1 kan have forskellige svar og løses på mange måder, mens opgave N2 reelt har ét rigtigt svar, som kun kan opnås ad et forholdsvist begrænset antal ruter.

Respondenternes vurdering af opgaverne fremgår af tabel 8.31.

Spørgsmål	N	N1			N	N2		
Svar	#	Eksamen	Undervisning	Afvist	#	Eksamen	Undervisning	Afvist
Alle	160	21%	74%	5%	159	64%	35%	1%
Fagidentitet A	88	22%	74%	5%	88	60%	39%	1%
Fagidentitet B	20	30%	65%	5%	20	65%	35%	0%
Fagidentitet C	18	6%	89%	6%	18	78%	17%	6%
Fagidentitet D	34	21%	74%	6%	33	64%	36%	0%

8.31) Opgørelse over fordeling af vurderinger af opgave N1 og N2 i sekvens af modelleringsopgaver

Forskellen mellem klarheden over hvordan et svar ser ud kommer tydeligt til udtryk i forskellen mellem andelene der vurderer de to opgaver eksamensegnet. Opgaver med uklare svar synes for mange respondenter ikke at være så vigtige, at de fortjener en plads ved den skriftlige eksamen. Dette er muligvis en overfortolkning, fordi mange andre bekymringer spiller ind. På den anden side, hvis noget virkelig står centralt i ens fagidentitet, så vil man nok være tilbøjelig til at mene at der findes en løsning på de praktiske problemer med formen. Svarene antages altså at være sigende.

Det ses at også for disse opgaver skiller respondenter tilsluttet fagidentitet C sig noget ud. De er mindre tilbøjelige til at se N1 som eksamensopgave, men faktisk lidt mere tilbøjelige til at se N2 som eksamensopgave.

Respondenterne kunne tilslutte sig en række begrundelser for deres valg. Disse er sammenfattet i tabel 8.32.

Uddybende spørgsmål Svar på hovedspørgsmål	Alle	Eksamen	Underv.	Afvist
Undersøgelser af spil er irrelevant i matematik	1%	0%	1%	0%
Det er for uklart hvad det matematiske indhold i opgaven er	24%	9%	26%	63%
Det er spændende at eleven selv skal definere kriterierne matematisk	66%	91%	63%	13%
Det er for uklart hvordan en korrekt besvarelse ser ud	49%	33%	52%	63%
Der er for lidt tid ved en skriftlig eksamen til en sådan opgave	56%	30%	66%	13%
Ingen svar	3%	3%	3%	0%
N	*160*	*33*	*119*	*8*

8.32) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave N1.

Mange respondenter finder det spændende at eleven selv skal definere de opstillede kriterier matematisk, særligt blandt dem som har svaret *eksamen*. For sidstnævnte synes det altså at være en vigtig pointe at medtage ved eksamen. Færre end for de to foregående opgaver angiver at det matematiske indhold er uklart, men uklarheden over hvordan "et korrekt svar" ser ud, er også for denne opgave afgørende for mange af dem som ikke finder den eksamensegnet.

I de frie kommentarer dukker følgende op (i forskellige varianter):

> »Sandsynlighedsregning er ikke en del af kernepensum, så derfor ikke. Og så er jeg bekymret for tidsforbruget og de svage elever.« (Respondent #28)

Denne kommentar er mest af metodisk interesse. Selvom det er forsøgt udpenslet i svarmuligheden, at respondenten bestemmer "form og indhold", så vælger en del respondenter flere steder i undersøgelsen at vurdere opgaver i forhold til aktuelt gældende form og indhold. Det kan altså være svært at løfte en respondents tænkning til et principielt niveau, hvor de skal løsrive sig fra det de kender til dagligt. Dette er naturligvis et problem ved den samlede metode.

Ser man på respondenternes tilslutning til begrundelserne for deres vurdering af opgave N2, så ser fordelingen ud som vist i tabel 8.33.

Uddybende spørgsmål Svar på hovedspørgsmål	Alle	Eksamen	Underv.	Afvist
Undersøgelser af indhegning er irrelevant i matematik.	1%	1%	0%	0%
Det er for uklart hvad det matematiske indhold i opgaven er.	4%	1%	9%	50%
Det er for svært for eleven at komme fra tekst til matematikopgave	31%	17%	59%	0%
Det er for uklart hvordan en korrekt besvarelse ser ud	11%	3%	25%	50%
Opgaven er for svær til matematik på højeste niveau.	6%	2%	13%	0%
Der er for lidt tid ved en skriftlig eksamen til en sådan opgave	26%	13%	52%	0%
Ingen svar	45%	68%	5%	0%
N	*159*	*101*	*56*	*2*

8.33) Opgørelse over fordeling af uddybende spørgsmål til vurdering af opgave N2.

Her kan man starte med at bemærke, at flertallet af dem som har vurderet den eksamensegnet, ikke har svaret nogen af mulighederne. Det skyldes at alle udsagnene er negative i deres vurdering af opgaven. Derudover er den mest udbredte anke imod opgaven som eksamensopgave, at det er vanskeligt for eleverne at "komme fra tekst til matematikopgave". Der er til gengæld i meget mindre grad problemer med uklarheder over matematisk indhold og udseende af en korrekt besvarelse. Ligeledes synes det overordnede sværhedsniveau heller ikke at være for højt.

Som frie kommentarer ses bl.a. følgende:

> »opgaven skal konkretiseres - hvor meget hegn er der til rådighed« (Respondent #142)
>
> »Opgaven kunne evt tilpasses som problemformulering i et projekt, men jeg arbejder oftest med mere veldefinerede opgaver. Der mangler oplysninger, for at opgaven kan løses.« (Respondent #139)

Den første respondent har kaldt opgaven eksamensegnet, men mener dog den er for løst formuleret. Der skal være nogle konkrete tal til rådighed. Den anden respondent har helt afvist opgaven, ligeledes på grund af mangel på oplysninger, hvis fravær respondenten mener helt forhindrer at opgaven kan løses. Selvom de har vurderet opgaven helt forskelligt, minder deres kommentarer en del om hinanden. Det siger noget om en relevant distinktion inden for *anvendelses*-dimensionen i forhold til hvor matematisk klargjorte anvendelsesopgaver skal være, før matematik kan begynde at arbejde med dem. Og at personer med nogenlunde samme placering, kan svare ret forskelligt.

I den endelige vurdering af de to opgaver vurderes de begge at have tyngde i tyngdepunktet *problemløsning*, fordi det matematiske endemål er mere eller mindre klart, men vejen til løsningen er uklar. Opgave N1 vurderes endvidere at have tyngde i *service* fordi situationen fremstår realistisk, mens opgave N2 har tyngde i *motivation*, fordi situationen er ret kunstig. Den samlede vurdering af de to opgavers tyngdebidrag er sammenfattet i tabel 8.34.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave N1	0	2	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
Opgave N2	0	2	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0	0

8.34) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne N1 og N2

8.3 Fagligt samspil

Den sidste test i denne "lakmus"-prøve omhandler situationer hvor matematik bringes ind i faglige samspil med andre fag. Denne prøve har været vigtig ud fra en antagelse om, at et fag udfordres mest grundlæggende på en identitet, når det skal "forhandle sig på plads" med et andet fag om indholdet i en konkret undervisningsaktivitet.

Sådanne faglige samspil er en institutionaliseret del af det almene gymnasium siden 2005-reformen. Den væsentligste ramme for sådanne er konstruktionen *almen studieforberedelse* (forkortet "AT"), hvor eleverne gennem typisk alle tre år jævnligt indgår i forløb hvor to eller flere fag skal arbejde sammen om et fælles tema eller problem. Dertil kommer *Studieretningsprojektet* (forkortet "SRP"), hvor eleven almindeligvis skriver en større opgave på 15-20 sider ud fra en problemformulering stillet i to fag. Endeligt kan faglige samspil uden for disse fastlagte rammer også forekomme.

I undersøgelsen blev respondenterne udsat for en sekvens på otte forskellige formuleringer af en problemstilling som de skulle tage stilling til om de mente matematik kunne indgå i sammen med et nærmere specificeret andet fag. Endvidere skulle de vurdere problemstillingens anvendelighed som SRP-oplæg. Spørgsmål og svarmuligheder var formuleret som følgende:

Spørgsmål 1: ”Eksempel på en opgaveformulering for et fagligt samspil (x af 8): [*formulering*] Hvad er dit syn på samspil nr. x?”	
Kortsvar	**Langt svar (fra skemaet)**
Central	”Hvis jeg bestemte, ville det være **centralt** for matematik at deltage i dette samspil.”
Acceptabel	”Hvis jeg bestemte, ville det være **acceptabelt** at matematik deltog i dette samspil.”
Afvist	”Hvis jeg bestemte, ville matematik **ikke blive udsat for** deltagelse i dette samspil.”
Spørgsmål 2: ” Ville du være tryg ved at vejlede et SRP-projekt, med denne opgaveformulering?”	
Kortsvar	**Langt svar (fra skemaet)**
+	Ja
÷	Nej
?	Ved ikke

Formålet med opdelingen i to spørgsmål har her - som ved sekvensen på 16 opgaver - været at dels se det i forhold til den daglige undervisning, dels i forhold til en eksamenslignende situation. Hvor der i opgavesekvensen imidlertid var lagt vægt på at eksamensformen var fri (”Hvis du bestemte…”), så er der her reference til den eksisterende form på en SRP. Retrospektivt set betyder det, at svarene i højere grad handler om at vurdere op mod det eksisterende, end at udtrykke hvor man selv står. SRP-spørgsmålet vil derfor blive behandlet i mindre grad i det følgende og vil ikke indgå i den endelige vurdering af identitetsbidraget fra samspillet.

Det gælder i øvrigt for de otte samspil at de fremstilles parvist. Hvert par er navngivet ved et bogstav og hver opgave ved bogstavet og et tal. Organiseringen i par følger følgende logik:

S. Velafgrænset problemstilling i samarbejde med naturvidenskabeligt fag.
T. Velafgrænset problemstilling i samarbejde med ikke-naturvidenskabeligt fag.
U. Åben problemstilling i samarbejde med naturvidenskabelige fag.
V. Åben problemstilling i samarbejde med ikke-naturvidenskabelige fag.

Som med de andre spørgsmål der har været stillet, viser det sig at der opstår metodiske problemer ved at få respondenterne til at prøve at indpasse sig i de konkrete kategorier. Her blot to eksempler på kommentarerer som faldt til nogle af de definerede samspil:

> »centralt opfatter jeg som noget man skal.....i modsætning til muligheder« (Respondent #191)
>
> »Jeg mener ikke, at noget enkeltforløb af den nævnte type fortjener prædikatet "centralt"« (Respondent #42)

De to respondenter siger begge at distinktionen mellem de to ikke-afvisende kategorier ”centralt” og ”acceptabelt” svækkes af at respondenterne ikke mener at begrebet ”centralt” kan anvendes på konkrete faglige samspil, fordi ordet ”centralt” leder tankerne hen på noget obligatorisk og uundgåeligt. Og et konkret forløb er naturligvis ikke i sig selv obligatorisk. Det svækker naturligvis respondentens mulighed for at udtrykke i hvilken grad de genkender deres fagidentitet i et samspil, hvis den ene svarkategori for nogle respondenter udelukkes af mere formelle grunde.

8.3.1 Velafgrænset problem med naturvidenskab

De to til undersøgelsen konstruerede samspil i kategorien ”velafgrænset problemstilling i samarbejde med naturvidenskabeligt fag” ses herunder:

S1: Samspil 5 (med kemi)	**S2: Samspil 1 (med fysik)**
Redegør for fænomenet *2. ordens reaktioner* og udfør og rapporter 3 forsøg med sådanne. Opstil en generel differentialligningsmodel for en 2.ordens reaktion og anvend denne på de 3 gennemførte forsøg. Løs om nødvendigt ligningen numerisk med et computerprogram. Diskuter forskelle og ligheder mellem resultater fra teori, eksperiment, model og simulering.	• Opstil definitioner på begreberne *grænseværdi* og *differentialkvotient* og bevis regnereglerne for sådanne. Regn de vedlagte opgaver. • Redegør for Newtons bevægelseslove og deres anvendelse i beskrivelsen af planetbevægelse. • Diskuter hvilken betydning differentialregning har for muligheden for at beskrive solsystemet.

Ideen i begge disse samspil er altså at problemstillingen er forholdsvist afgrænset. Det er rimelig tydeligt for eleven hvad der forventes af eleven, for at svare tilfredsstillende på opgaven. Begge samspil har samtidig en ret klar adskillelse af hvad der er de to fags opgaver. Fagene har så at sige at spørgsmål hver samt et tredje spørgsmål til at binde de to faglige arbejder sammen. Denne opdeling skulle gøre det nemt for en matematiklærer at se hvilken rolle faget tænkes at spille.

Respondenterne har svaret som vist i tabel 8.35:

Spørgsmål	N	S1			S1x			S2			S2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	137	69%	30%	1%	82%	7%	11%	64%	32%	4%	63%	24%	13%
Fagidentitet A	73	66%	33%	1%	79%	7%	14%	66%	30%	4%	66%	23%	11%
Fagidentitet B	19	84%	16%	0%	89%	5%	5%	68%	21%	11%	47%	32%	21%
Fagidentitet C	16	69%	31%	0%	81%	13%	6%	63%	38%	0%	63%	25%	13%
Fagidentitet D	29	69%	31%	0%	86%	3%	10%	55%	41%	3%	66%	21%	14%

8.35) Opgørelse over fordeling af vurderinger af samspil S1og S2 i sekvens på 8 samspil

Samspil S1 er mellem matematik og kemi. Som samspil er det kendetegnet ved at være af *støttefaglig* art. Det vil sige at dagsordenen for problemstillingen i høj grad sættes af kemi-faget, mens matematiks rolle er at understøtte denne dagsorden med matematiske modeller. Det ses at samspillet stort set ikke afvises af nogen, samt at ca. 70% af respondenterne kalder det ”centralt”. Det ses endvidere at blandt dem som har tilsluttet sig den anvendelsesorienterede fagidentitet B, er der en lidt større (ikke-signifikant, $p=0,11$) tilbøjelighed til at vælge ”central” frem for ”mulig”. Endeligt ses det at stort set alle respondenter mener at formuleringen vil være relevant i en SRP-formulering.

Samspil S2 er mellem matematik og fysik. Her er ikke tale om et *støttefagligt* samspil, men snarere et *parallelfagligt*, hvor fagene arbejder hver for sig på helt egne præmisser, for så at blive bundet sammen til sidst af en *meta*-refleksion over matematikkens rolle som erkendelsesværktøj i fysik. Også her ses stor tilslutning til at kalde samspillet ”centralt” og stort set ingen afvisning, om end lidt flere end for S1. Der ses også her en stor tilslutning - om end noget mindre end for S1 - til samspillet som SRP-problem. Det bemærkes dog at være en signifikant ($p = 0,05$) mindre tilslutning til dette blandt de som tilsluttede sig fagidentitet B. Det er således interessant at se for denne gruppe, hvordan skelnen mellem en værktøjsorienteret *støttefaglighed* og en meta-orienteret *parallelfaglighed* synes at slå igennem i vurderingen.

Samspil S1 vurderes at have sin største tyngde i *anvendelsesdimensionen* i tyngdepunktet *service*, fordi der er tale om et spørgsmål hvis indhold er styret af den kemifaglige case, men samtidig afgrænset af det forhold at det skal passe til en bestemt matematikfaglighed. Samtidig vurderes samspillet at have tyngde i *færdighedstræning*, da der i høj grad skal trækkes på konkrete færdigheder i omgang med differentialligninger.

Samspil S2 vurderes at have sin største tyngde i *meta*-dimensionen i tyngdepunktet *videnskabsteori*, fordi dagsordenen i samspillet er at diskutere matematiks rolle i et andet fag. Samtidig vurderes det at have tyngde i teoridimensionens tyngdepunkter *begrebskendskab* og *ræsonneret retfærdiggørelse*, på baggrund af det faglige ind hold i det rent matematikorienterede spørgsmål.

Vurderingen af de to samspil er sammenfattet i tabel 8.36.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave S1	2	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0
Opgave S2	0	0	2	0	2	0	0	0	0	0	0	3	0

8.36) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne S1 og S2

8.3.2 Velafgrænset problem med ikke-naturvidenskabeligt fag

De to til undersøgelsen konstruerede samspil i kategorien "velafgrænset problemstilling i samarbejde med ikke-naturvidenskabeligt fag" ses herunder:

T1: Samspil 4 (med dansk)	**T2: Samspil 6 (med historie)**
• Analyser argumentationsformerne i de tre udleverede avisartikler omhandlende de etiske sider af kloning og anden bioteknologi. • Redegør for Euclids postulater og benyt disse til at bevise 3 af de 10 udleverede sætninger. • Diskuter forskelle og ligheder mellem måder at argumentere på i dansk og matematik.	• Redegør for samfundsstrukturerne i det oldegyptiske samfund, med særlig vægt på de såkaldte *skrivere*. • Analyser de udleverede oversatte dele af *papyrus Rhind*, med henblik på at afdække de matematiske metoder, egypterne har benyttet. • Diskuter hvilken rolle matematik har haft for et samfund som det egyptiske.

Også for disse to samspil er der tale om rimeligt velafgrænsede problemstillinger. Det er heller ikke her specielt uklart for eleven hvad der skal gøres. Begge samspil følger en klar struktur i sine spørgsmål og det er ret nemt at identificere det første spørgsmål som mest for det andet fag, det andet spørgsmål som mest for matematik og det tredje som et der skal binde det sammen.

Respondenterne har svaret som vist i tabel 8.37:

Spørgsmål	N	T1			T1x			T2			T2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	137	36%	44%	20%	51%	34%	15%	32%	57%	11%	59%	23%	18%
Fagidentitet A	73	36%	44%	21%	52%	32%	16%	37%	52%	11%	59%	23%	18%
Fagidentitet B	19	26%	53%	21%	47%	47%	5%	37%	58%	5%	68%	11%	21%
Fagidentitet C	16	50%	25%	25%	44%	44%	13%	31%	63%	6%	63%	19%	19%
Fagidentitet D	29	38%	48%	14%	55%	28%	17%	17%	66%	17%	52%	31%	17%

8.37) Opgørelse over fordeling af vurderinger af samspil T1og T2 i sekvens på 8 samspil

Samspil T1 er - som S2 ovenfor - et *parallelfagligt* samspil. De to arbejder i matematik og dansk er helt adskilte og isoleret set enkeltfaglige. Først i det afsluttende spørgsmål sker der noget der fortjener at blive kaldt ”samspil” mellem fagene. Omkring en tredjedel af respondenterne kalder det *centralt*, mens hver femte afviser det. Halvdelene mener at det kan bruges som SRP-emne. Der ses en (ikke signifikant) variation blandt tilsluttede til fagidentiteterne B og C, hvor førstnævnte er lidt mindre tilbøjelige til at kalde det centralt og sidstnævnte lidt mere.

En kommentar - som leveres i lignende varianter fra andre respondenter - er følgende:

> »Hvad pokker har kloning og euklid med hinanden at gøre? Det er ganske enkelt for underligt. og desuden det med at bevise 3 ud af 10, det bliver for ...« (Respondent #180)

Synspunktet viser at en del undervisere umiddelbart har svært ved at forholde sig til den metafaglige diskussion om matematikfagets argumentationsformer holdt op mod andre fags ditto. I stedet flytter fokus til den faglige substans, som for disse respondenter forekommer kunstigt sammenbragt.

Samspil T2 har i højere grad en *støttefaglig* karakter, men dog på en anden måde end det sås ovenfor i S1. I samspil S1 kom kemifaget med en problemstilling, som matematik hjalp med at analysere. I samspil T2 støtter matematikfaget i historiefaget ved selv at lade sig være et objekt som historiefaget kan undersøge. En særlig pointe i T2 er endvidere en problemorientering i den åbne tilgang til kildemateriale. Potentialerne i en sådan tilgang til matematikhistoriske faglige samspil har været analyseret i (Johannesen 2015).

Samlet set vurderes T1 til at have tyngde i dels teori-dimensionens tyngdepunkt *ræsonneret retfærdiggørelse*, dels i meta-dimensionens tyngdepunkt *intern refleksion*, fordi det i høj grad handler om at se faget indefra. Sammenstillingen med argumentationsformer i dansk er fra et matematiksynspunkt alene et værktøj til at løfte og kvalificere denne refleksion. T2 vurderes til først og fremmest at have tyngde i meta-dimensionens tyngdepunkt *intern refleksion* med fokus på matematikkens egen historie. Derudover også i *samfundsfunktion*, når der reflekteres over matematikkens historiske betydning for det oldegyptiske samfund. Endeligt giver den åbne brug af historiske kilder samspillet et aspekt af at eleven selvstændigt må åbne et matematisk problemfelt op i et passende antal skridt, hvilket giver tyngde i tyngdepunktet *problemløsning.* Vurderingerne ses i tabel 8.38.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Opgave T1	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
Opgave T2	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	2

8.38) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne T1 og T2

8.3.3 Åben problemstilling med naturvidenskabeligt fag

De to til undersøgelsen konstruerede samspil i kategorien ”åben problemstilling i samarbejde med naturvidenskabeligt fag” ses herunder:

U1: Samspil 7 (med biologi)	**U2: Samspil 8 (med fysik)**
Med 40 års mellemrum oplever man i Canada en eksplosion i antallet af Spruce Budworms (*Choristoneura fumiferana*). Dette går hårdt udover bestanden af fyrretræer og dermed træindustrien. Populationsudviklingen kan beskrives med følgende model: $$\frac{dN}{dt} = r \cdot N \cdot \left(1 - \frac{N}{K}\right) - \beta \frac{N^2}{\alpha^2 + N^2}$$ Redegør for indgående parametres betydning og argumentér med biologisk teori for ligningens udseende. Undersøg evt. med numeriske metoder, hvad de indgående parametre betyder for udviklingen.	Med hvilken hastighed rammer en faldskærmsudspringer jorden?

Der er stor forskel på graden af åbenhed i disse to eksempler. Samspil U1 har en forholdsvist velafgrænset problemstilling, men det er åbent hvordan man skal strukturere løsningen af det. I selve spørgsmålet indgår ikke en klar struktur på arbejdet, modsat f.eks. S1. Samspil U2 er helt åbent. Der er godt nok en problemstilling der forekommer afgrænset, men reelt vil det vise sig at selv det at beslutte hvad der kan være et brugbart svar på spørgsmålet, er en forholdsvis åben situation.

Respondenternes svar på problemstillingen fremgår af tabel 8.39.

Spørgsmål	**N**	**U1**			**U1x**			**U2**			**U2x**		
Svar	**#**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**	**Central**	**Mulig**	**Afvist**	**+**	**÷**	**?**
Alle	137	58%	41%	1%	64%	16%	20%	29%	49%	22%	34%	56%	10%
Fagidentitet A	73	60%	38%	1%	60%	18%	22%	29%	48%	23%	38%	48%	14%
Fagidentitet B	19	53%	47%	0%	63%	21%	16%	37%	42%	21%	42%	58%	0%
Fagidentitet C	16	56%	38%	6%	69%	13%	19%	38%	31%	31%	31%	56%	13%
Fagidentitet D	29	55%	45%	0%	72%	10%	17%	21%	66%	14%	17%	76%	7%

8.39) Opgørelse over fordeling af vurderinger af samspil U1og U2 i sekvens på 8 samspil

Begge samspil er af støttefaglig art på samme måde, som det sås i samspil S1. Der er tale om problemstillinger hentet fra andre fag, som matematik herefter bidrager til at belyse gennem matematisk modellering. Der er imidlertid forskel på hvordan de to samspil modtages af respondenterne.

U1 markeres central af ca. 60% og et tilsvarende antal mener det vil kunne bruges som oplæg til en SRP. De særlige kendetegn ved U1 er at der stilles ret præcise krav til hvad det er matematikfaget forventes at levere til den biologiske problemstilling. Dermed får opgaven sin væsentligste tyngde i anvendelsesdimensionens *service*-tyngdepunkt. Endvidere lægger den eksplicitte differentialligning, som ikke minder om standard-differentialligningerne i gymnasiets pensum, op til en teoretisk tung analyse, som lægger en stor tyngde i *teoriforståelse*. Det matematiske potentiale i eksemplet er analyseret i Jensen og Nielsen (2011, 2011a).

U2 fremstår anderledes. Her er blot givet et meget overordnet problem hentet fra fysik. Det er højest uklart hvad det egentlige matematiske arbejde der skal udføres er. Det bliver altså til en selvstændig del af matematikfaget at hitte på hvad faget skal bruges til for at svare på problemstillingen. Samspil U2 har derfor stor tyngde i anvendelsesdimensionens tyngdepunkt *værktøj*. Formen på spørgsmålet giver anledning til mange kommentarer. Her tre eksempler:

> »Emnet er interessant, men jeg ville ikke acceptere denne formulering, det skal konkretiseres nærmere.« (Respondent #116).
>
> »Det skal uddybes mere. Gærdet er lavt...   "Min SRP: 50 km/t. Slut. Kilder: Google."« (Respondent #51)
>
> »Det skal godt nok være en meget dygtig og selvstændig elev hvis man skal bruge den formulering hvis der skal komme noget godt ud af det« (Respondent #104).

Det er tydeligt at formen på spørgsmålet giver anledning til mange kommentarer. Den første synes at artikulere en modstand mod netop *værktøjs*-tilgangen og i stedet at efterspørge en *service*-tilgang. Det virker umiddelbart som et identitets-issue. Den anden har samme kommentar, men angiveligt fordi det tilsyneladende kan besvares uden aktivering af faglighed overhovedet. Dette synspunkt, at matematikfaglighed kan omgås hvis ikke den adresseres eksplicit findes flere steder i undersøgelsen og siger også noget om fagidentiteten. Den sidste respondent synes til gengæld at købe den helt åbne problemstilling, men peger på at formen gør opgaven enormt svær. Dette i kontrast til udsagn som »*Alt for tyndt*« (#123) og »*Det er alt for lidt til et SRP-projekt*« (#169) som viser, at der parallelt med fagidentitetsbaserede uenigheder og findes en niveau-baserede.

En anden diskussion der udfolder sig, kommer til udtryk i følgende to kommentarer:

> »Det matematiske aspekt af opgaven er indeholdt i fysik, synes jeg.« (Respondent #172)
>
> »Det kan sagtens være en del af en SRP. Det centrale er, at matematik og fysik kommer til at gøre brug af hinanden.« (Respondent #166)

Det første citat udtrykker en meget klar fagidentitetsmæssig pointe. Det forhold at man kan anskue matematikken som indeholdt i fysikken, gør at matematik ikke kan finde sin egen plads i samspillet. Matematik skal så at sige have noget unikt at byde ind med, for at kunne hævde sig selv som fag. Det modsatte synspunkt synes at komme til udtryk i det andet citat, hvor netop det forhold at fagene kan bruge hinanden bliver bærende. De to synspunkter udtrykker altså på hver sin måde forskellige selvforståelser hos undervisere om i hvilken forstand matematik kan siges at optræde meningsfuldt i en anvendelsessituation.

På baggrund af ovenstående er vurderingerne af samspil U1 og U2 givet i tabel 8.40 herunder.

Tyngdepunkt	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Opgave U1	0	0	0	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0
Opgave U2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0

8.40) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne U1 og U2

8.3.4 Åben problemstilling med ikke-naturvidenskabeligt fag

De to til undersøgelsen konstruerede samspil i kategorien ”åben problemstilling i samarbejde med ikke-naturvidenskabeligt fag” ses herunder:

V1: Samspil 2 (med samfundsfag)	**V2: Samspil 3 (med historie)**
Hvordan vil udgifter og indtægter som følge af indvandring til Danmark udvikle sig de næste 20 år?	Historikere har mange forskellige bud på hvordan vikingerne konkret førte krig. F.eks. at de lagde skibsmasten ned kort før angreb på kystbyer for at optimere overraskelsesgraden. Redegør for forskellige historieteorier om vikingernes strategi og taktik i krig. Opstil selv forskellige matematiske modeller, der kan vurdere disse teorier. Hvor mange af historikernes påstande tror I på?

Samspil V1 minder om U2 ovenfor. Et kort og forholdsvist velformuleret problem, hvor det overhovedet at finde ud af hvad der meningsfuldt kan svares på spørgsmålet indgår i det faglige arbejde. V1 er dog forventeligt mere udfordrende for matematiklæreren, fordi samfundsfag ikke har en matematikholdig teori som problemstillingen nemt kan kobles op på. Dette modsat fysik, hvor grundprincipperne almindeligvis er formuleret som en matematisk model. Modellen til løsningen af spørgsmålet i V1 skal altså bygges fra bunden. Omvendt støder man ikke ind i problemstillingen berørt afslutningsvis for U2. Ingen vil formentlig sige, at det bliver ”rent samfundsfag”.

V2 er mere velbeskrevet i hvad det er der søges svar på, men modelleringsarbejdet er lige så åbent som for V1 og U2. Der er tale om et *støttefagligt* samspil, hvor matematisk modellering bruges til at kvalificere historiefaglige teorier. Men hvor matematikindholdet i U2 virker klart for de fleste matematikere, og hvor de fleste nok har en fornemmelse af at matematik har noget at byde ind med i V1, så forventes det at de fleste vil være meget tøvende overfor om der er grundlag for at matematik kan byde ind med noget i besvarelsen af problemstillingen.

Respondenternes reaktioner på V1 og V2 fremgår af tabel 8.41.

Spørgsmål	N	V1			V1x			V2			V2x		
Svar	#	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?	Central	Mulig	Afvist	+	÷	?
Alle	137	21%	53%	26%	23%	58%	19%	9%	38%	53%	15%	65%	20%
Fagidentitet A	73	21%	58%	22%	27%	56%	16%	7%	37%	56%	15%	66%	19%
Fagidentitet B	19	32%	42%	26%	26%	47%	26%	21%	32%	47%	21%	58%	21%
Fagidentitet C	16	25%	50%	25%	6%	69%	25%	6%	44%	50%	19%	69%	13%
Fagidentitet D	29	14%	48%	38%	21%	62%	17%	7%	41%	52%	7%	66%	28%

8.41) Opgørelse over fordeling af vurderinger af samspil V1og V2 i sekvens på 8 samspil

Det ses at V1 ikke afvises i specielt højere grad end U2 blev det (se tabel 8.39). Forskellen på at stille en åben problemstilling i fysik og samfundsfag er altså ikke overvældende stor. Til gengæld ses at afvisningen af V2 at være stor - lige over halvdelen. Det bemærkes at respondenter som har tilsluttet sig fagidentitet B er lidt mere tilbøjelige til at finde V1 og V2 centrale, end de øvrige.

Et eksempel på en kommentar til V2 er følgende:

> »Her er det ekstremt uklart, hvad man forventer, at eleven skal give sig i kast med i forhold til matematikken, og jeg ville personligt ikke vide, hvordan jeg skulle gribe opgaven an.« (Respondent #74).

Det ses tydeligt at respondenten har svært ved at acceptere matematik som et værktøj man kan gribe til, uden at vide hvad produktet bliver. Der er en klar forventning om at et problem der angribes med matematik på forhånd vides at give en eller anden type af meningsfuldt svar. Respondenten strammer argumentet ved at sige, at respondenten ikke engang selv ville vide hvad der skulle gøres.

Begge samspil V1 og V2 vurderes til primært at have tyngde i anvendelsesdimensionens tyngepunkt *værktøj*, da begge fremstår som en problemstilling fra et andet fag, som matematik åbent og uden en velafgrænset bestilling, skal prøve at bidrage til besvarelsen af. Vurdering ses i tabel 8.42.

Tyngdepunkt	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Opgave V1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0
Opgave V2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0	0

8.42) Opgørelse over tyngdebidrag fra opgaverne V1 og V2

8.4 Aggregering af svar til individuel fagidentitet

I de foregående afsnit af kapitel 8 er de forskellige opgaver og samspil som respondenterne blev konfronteret med, præsenteret og vurderet i forhold til de begreber der blev opstillet til at beskrive fagidentiteter. Den sværeste øvelse er imidlertid at aggregere den enkelte respondents reaktioner på de enkelte matematikaktiviteter til en egentlig indplacering i begrebsapparatet.

Øvelsen er svær fordi den forudsætter to ting. For det første en kvantificering som sætter vægte på de svar som de enkelte respondenter har givet. En sådan oversættelse fra ”ord” til ”tal” er naturligvis stærkt overfladisk og helt igennem diskutabel. Ligesom proportionerne mellem forskellige værdier er meget kunstige. Omvendt er det i sagens natur meget svært at lave aggregeringen hvis man ikke gør det. Derfor må man gøre det, med passende grad af forbehold over for de konklusioner man drager af det.

For det andet må der laves en homogen fortolkning af respondenternes svar. Alle der har svaret en bestemt svarmulighed til et bestemt spørgsmål må antages at have ment det samme med det. Og i øvrigt at have ment det, som man ved aggregeringen fastlægger som den homogene fortolkning. De foregående diskussioner viser at svarene ikke bare har rødder i fagidentitetsmæssige årsager, men også i spørgsmål om niveau og i pædagogisk pragmatik (hvad kan ”lade sig gøre”). Dertil kommer en del respondenter som nogle gange synes at være mere styret af hvad der faktisk gælder, end hvad hvad de selv synes.

Kvantificeringen og den homogene fortolkning af respondenternes svar kan altså på den ene side forekomme meget søgt og kunstig og er på den anden side en forudsætning for at kunne udlede et makroskopisk billede af respondentpopulationen. Aggregeringen af enkeltsvarene til en fagidentitet for den enkelte respondent skal altså læses med passende grad af forbehold.

Omvendt er det også vigtigt at huske, at metoden netop er tilrettelagt efter at få folk til at svare det de *faktisk* mener, frem for det de tror de mener. Det har været meningen at måle deres umiddelbare reaktion på forskellige eksemplarer af matematiske aktiviteter, frem for at spørge dem eksplicit hvad de mener om faget. Det er således metodisk nødvendigt at tilsidesætte hvad respondenten tror vedkommende mener om faget, for i stedet at fokusere på hvordan respondenten faktisk reagerer. Til dette er aggregeringen af enkeltsvar til en fagidentitet en metodisk nødvendighed.

I den foregående analyse er de forskellige eksemplarer af matematiske problemstillinger som respondenterne har været præsenteret for blevet vurderet således af de 13 tyngdepunkter fordelt på tre dimensioner har fået tilskrevet en værdi mellem 0 og 3. Disse værdier ganges med en faktor afhængigt af respondentens svar og resultatet tillægges respondentens fagidentitet som tyngde i det pågældende tyngdepunkt. Faktorerne fremgår af tabel 8.43:

Spørgsmål	**Faktor for svarmuligheder**
Hvad er dit syn på opgave nr. X?	Central: 2 Mulig: 1 Afvist: 0
Hvis du bestemte, ville en opgave som denne så kunne forekomme ved en 5-timers skriftlig matematik-eksamen på gymnasiets højeste niveau.	Ja: 1 Nej: 0 Ved ikke: 0
Herunder er det X'ne af fire eksempler på en opgave i "anvendt matematik" fra et tidligere opgavesæt til skriftlig eksamen på A-niveau. Vælg det udsagn som bedst beskriver din opfattelse af opgaven.	Det direkte svar på dette spørgsmål indgår ikke (jf. afsnit 8.2.1). Men en række uddybende udsagn indgår. Her vægtes tilslutning til udsagnet med faktoren 1.
Herunder vises den X'ne af fire opgaver fra skriftlig terminsprøve/eksamen i "Allerød-forsøget" 2002. Vælg det udsagn som bedst beskriver din opfattelse af opgaven.	Eksamen: 2 Undervisning: 1 Afvist: 0
Eksempel på en opgaveformulering for et fagligt samspil (x af 8): [*formulering*] Hvad er dit syn på samspil nr. x?	Centralt: 2 Acceptabelt: 1 Afvist: 0

8.43) Faktorer for forskellige svarmuligheder på spørgsmål der er vurderet tidligere i kapitel 8.

For hvert tyngdepunkt beregnes den maksimale tyngde som tyngdepunktet kan opnå. Når en respondents tyngde i tyngdepunktet skal beregnes, sker det som summen af bidrag til tyngdepunktet fra de svar respondenten har afgivet divideret med tyngdepunktets maksimale tyngde. Dette for at forskellige i tyngden ikke opstår alene som forskel i hvor mange spørgsmål der kan bidrage til det. Endvidere beregnes den samlede maksimale tyngde for hver af de tre dimensioner som summen af maksimal tyngde fra dimensionens tyngdepunktet. Maksimal tyngde fremgår af tabel 8.44.

Tyngdepunkt	**I**	**MED**	**OM**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**i**	**j**	**k**	**l**	**r**	**s**	**t**
Vægt	192	119	28	54	51	40	27	20	12	9	30	35	45	12	12	4

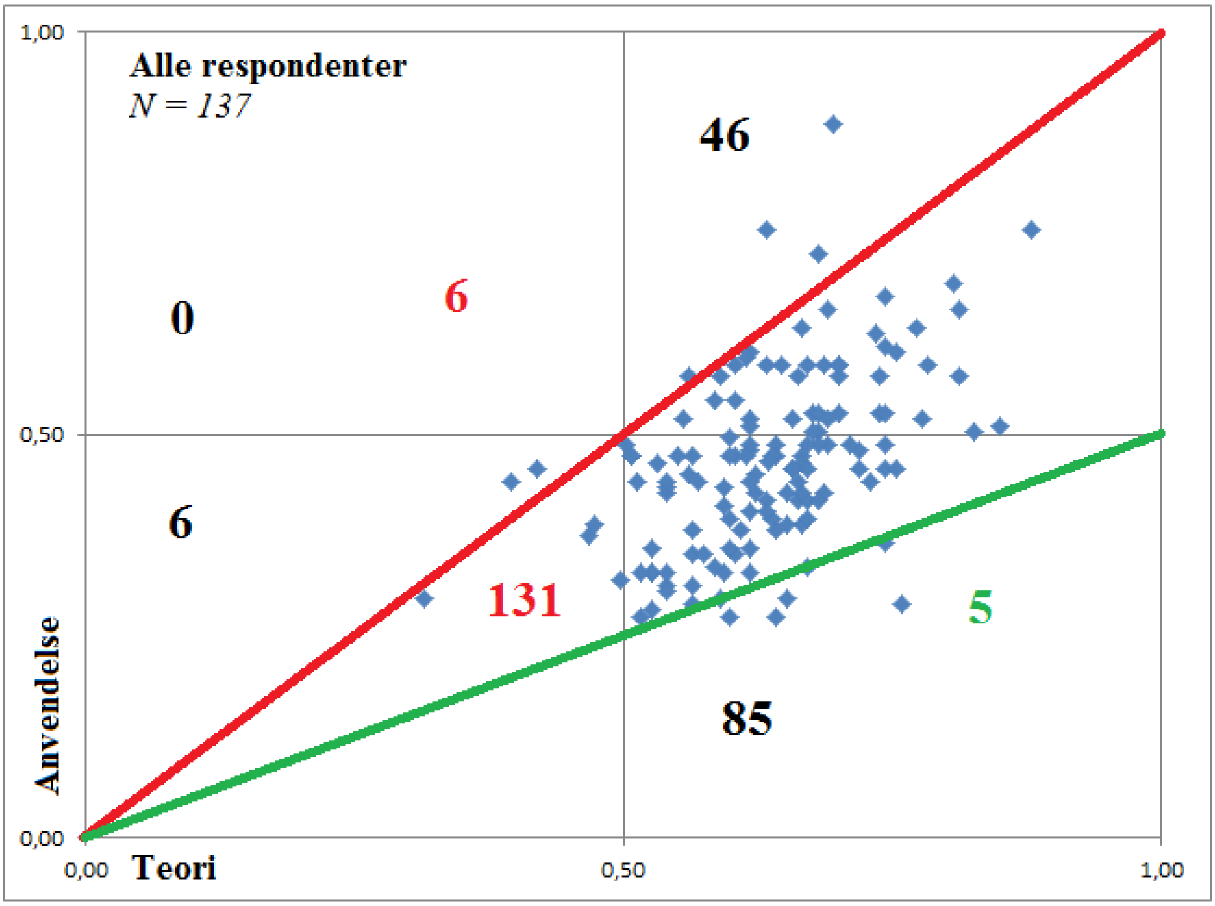
8.44) Den maksimalt opnåelige tyngde for hvert tyngdepunkt og for hver dimension samlet set.

Jo større maksimal tyngde et tyngdepunkt besidder, jo mere nuanceret kan det dækkes. Som det ses er tyngdepunkter som konventionskendskab (f), illustration (i) samt hele meta-dimensionen (OM, r, s, t) underrepræsenteret.

Aggregeringen af den enkelte respondents svar bliver altså til et tal (en ”tyngde) mellem 0 og 1 for hvert enkelt tyngdepunkt og for hver af de overordnede dimensioner. I de følgende afsnit vil disse individuelle fagidentiteter blive undersøgt på forskellige måder.

8.4.1 Teori-anvendelse - et samlet billede

På figur 8.45 er samtlige respondenter plottet med deres samlede tyngde i teoridimensionen på 1. aksen og deres samlede tyngde i anvendelsesdimensionen på 2. aksen. Feltet er opdelt i fire områder efter over og under en tyngde på 0,5 i hver af dimensionerne. De sorte tal angiver hvor mange respondenter der lander i det pågældende felt. Den røde linje angiver hvor tyngden for de to dimensioner er lige stor. Respondenter over den røde linje har altså større tyngde i anvendelsesdimensionen end i teoridimensionen og omvendt for respondenter under den røde linje. De røde tal angiver antal respondenter over hhv. under den røde linje. Den grønne linje angiver hvor tyngden i teoridimensionen er dobbelt så stor som i anvendelsesdimensionen. Respondenter under den grønne linje har altså over dobbelt så stor tyngde i teori-dimensionen som i anvendelsesdimensionen. Det grønne tal angiver antallet af respondenter under den grønne linje.

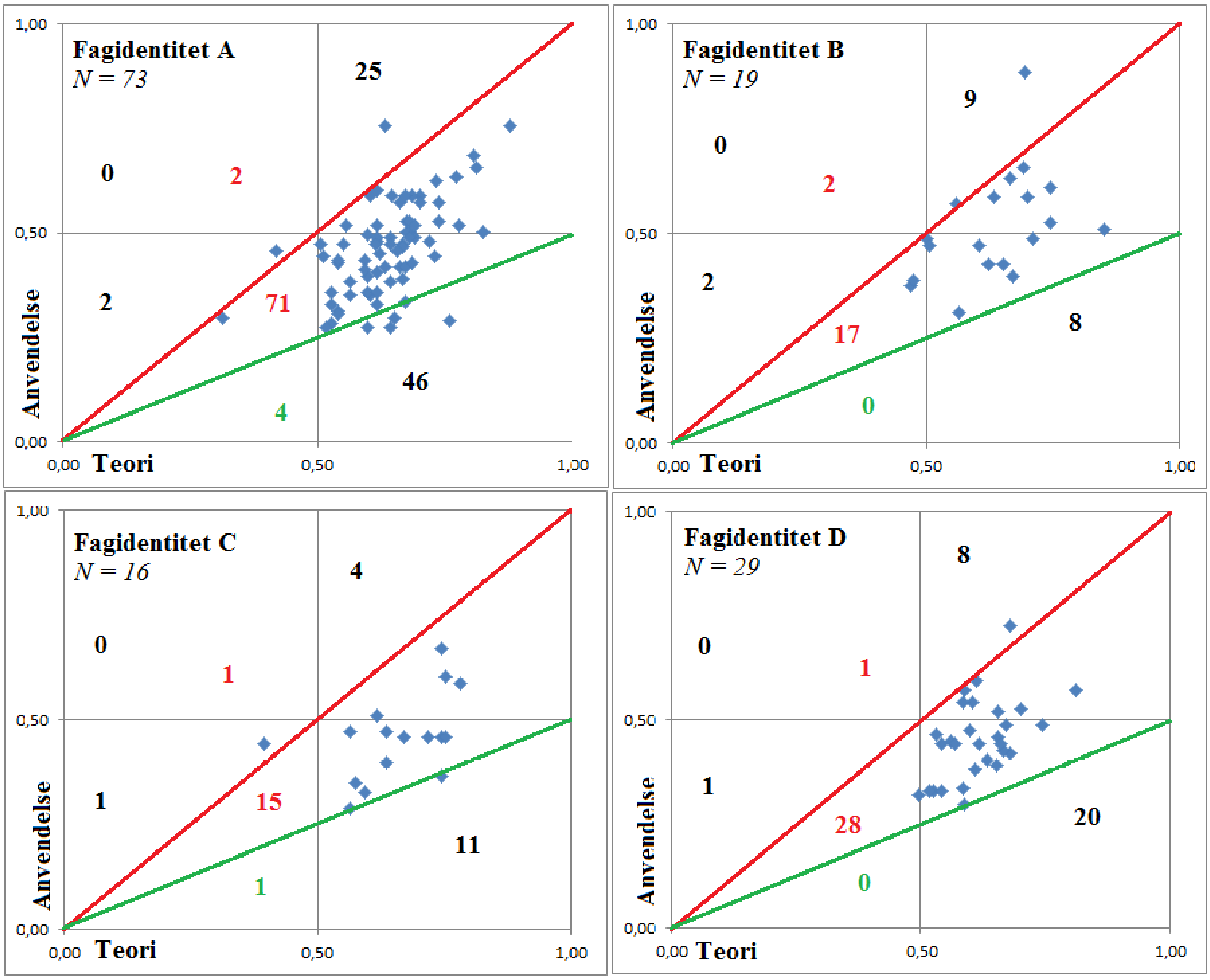


8.45) Plot af tyngde i teori- og anvendelsesdimensionen for alle respondenter.

Billedet viser at stort set alle respondenter ligger over 0,50 på teoridimensionen og at ca. to tredjedele ligger under 0,50 på anvendelsesdimensionen. Det bemærkes dog samtidig, at ingen respondent har en tyngde i anvendelsesdimensionen som er mindre 0,27. Det ses endvidere at blot 6 respondenter har større tyngde i anvendelsesdimensionen end i teoridimensionen, samt at kun 5 respondenter har mere end dobbelt så stor tyngde i teori- som i anvendelsesdimensionen.

Den overordnede analyse viser altså at ingen respondent har været fuldstændig afvisende overfor en af de to dimensioner. Og at respondenterne er mest tilbøjelige til at placere mere tyngde i teori-dimensionen end i anvendelsesdimensionen, men ikke mere end dobbelt så meget. Helt overordnet set peger analysen altså mod at flertallet af lærere finder begge dimensioner vigtige og ønsker en vis balance mellem dem, men at teori-dimensionen samtidig fremstår som primært vigtig.

På figur 8.46 ses samme plot som på figur 8.45, men nu opdelt efter hvilken af de fire eksplicitte fagidentiteter som respondenten selv har tilsluttet sig.



8.46) Plot af tyngde i teori- og anvendelsesdimensionen opdelt efter deklareret fagidentitet.

Personer der har tilsluttet sig den balancerede fagidentitet A viser sig at være dem som spreder sig mest ud. Omkring en tredjedel af respondenterne har en "tyngde" på over 0,5 i anvendelsesdimensionen og det er også her vi finder fire respondenter som har mere en dobbelt så stor tyngde i teoridimensionen, som i anvendelsesdimensionen. Fagidentitet A viser sig med en rimelig bred appel til populationen. Det samme gælder fagidentitet D, hvor respondenterne placerer sig nogenlunde magen til, dog mindre spredt ud.

Ser man i stedet på fagidentitet B og C kan der her ses en vis forskel. For fagidentitet B er knapt hver anden respondent over 0,5 i anvendelsesdimensionen, mens det kun gælder hver fjerde i fagidentitet C. Her synes altså at være en synlig forskel, selvom det er en sammenligning mellem to meget små populationer. Der synes til gengæld ikke at være den store forskel i hvordan respondenterne lægger tyngde i teori-dimensionen.

Overordnet set kan man altså sige, at der makroskopisk set er en vis grad af konsistens mellem deklareret fagidentitet og analytisk fagidentitet. Dette gælder især når vi sammenligner de to klare fagidentiteter B og C, mens billedet for A og D er relativt mudret, hvilket også var forventet. Samtidig må det siges at en del respondenter mikroskopisk set ikke har været helt så konsistente. Dette kan have mange årsager, men viser ikke desto mindre at der kan eksistere klare afvigelser mellem hvad en underviser tilkendegiver at mene i forhold til hvad underviseren faktisk mener når det kommer til mere praktiske situationer.

8.4.2 Analyse af enkelte tyngdepunkter

I foregående afsnit lå fokus på den overordnede sammenligning mellem teori- og anvendelsesdimensionerne. I dette afsnit vil der blive kigget ned på de enkelte tyngdepunkter. I tabel 8.47 er den gennemsnitlige tyngde i hvert tyngdepunkt samt for de tre dimensioner som helhed beregnet. Dels for hele populationen, dels opdelt efter de fire deklarerede fagidentiteter. Med forskellige farvekoder er fremhævet steder hvor afvigelsen mellem gennemsnittet af tyngde inden for en af fagidentiteterne og gennemsnittet af tyngde for alle respondenter er af en vis størrelse. Den blå linje er således gennemsnittet, mens grøn angiver større tyngde og rød/orange angiver mindre.

MAT-ID	I	MED	OM	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Alle	0,64	0,47	0,52	0,75	0,59	0,48	0,68	0,64	0,76	0,66	0,71	0,49	0,30	0,59	0,41	0,61
A	0,64	0,46	0,53	0,75	0,59	0,49	0,69	0,65	0,76	0,66	0,71	0,49	0,29	0,60	0,42	0,63
B	0,63	0,52	0,53	0,77	0,61	0,46	0,64	0,66	0,74	0,81	0,75	0,52	0,35	0,59	0,42	0,66
C	0,66	0,46	0,54	0,75	0,61	0,52	0,72	0,68	0,79	0,60	0,67	0,49	0,30	0,63	0,42	0,63
D	0,62	0,45	0,47	0,74	0,56	0,47	0,67	0,60	0,76	0,60	0,71	0,49	0,28	0,56	0,38	0,50

Gennemsnit
Mindst 0,05 under gennemsnit
0,02 til 0,04 under gennemsnit
0,02 til 0,04 over gennemsnit
Mindst 0,05 over gennemsnit

8.47) Gennemsnitlig tyngde i hvert tyngdepunkt for alle og opdelt efter tilsluttet fagidentitet.

Teoridimensionen (a, b, c, d, e og f)

For populationen som helhed ses, at i teoridimensionen lægges størst tyngde i *færdighedstræning* (a) og *konventionskendskab* (f). Sidstnævnte dog med klart forbehold for en meget lille samlet vægt (se tabel 8.44). Herefter findes størst tyngde i *teoriforståelse* (d) og *begrebskendskab* (e) efterfulgt af *problemsløning* (b). Mindst tyngde synes *ræsonneret retfærdiggørelse* (c) at få. Det sidste kan muligvis i højere grad handle om måden der er spurgt (aktiviteter der ligner skriftlige opgaver), end et reelt standpunkt. På den anden side set burde respondenterne forventes at reagere positivt på en matematik-aktivitet, hvis de faktisk finder den "vigtig".

Ser man på variationer mellem grupperne med forskellig deklaration af fagidentitet, så ses det at teoridimensionen som helhed har en smule mere tyngde hos fagidentitet C, der netop vægter teori som det vigtigste. Det ses samtidig at den ekstra tyngde især stammer fra tyngdepunkterne c, d, e og f. Tilsvarende ses at c, d og f har lidt mindre tilslutning end gennemsnittet blandt de som har deklareret fagidentitet B, der netop betoner det anvendte højere end det teoretiske.

I tabel 8.48 ses det hvordan de tildelte tyngder fordeler sig, i det det er opdelt i andele der er vurderet til at have lagt en tyngde på mindre end 1/3, mellem 1/3 og 2/3 og mere end 2/3 i tyngdepunktet *færdighedstræning* (a). Det ses at respondenter tilsluttet fagidentitet C fremstår lidt mindre tilbøjelige til give *færdighedstræning* over 2/3 end de øvrige. Dette kan måske forklares ved at en primært teorifokuseret fagidentitet lige netop ikke finder færdigheder helt så vigtige. Tilsvarende kan ses at respondenter tilsluttet fagidentitet D, som netop eksplicit siger at matematik i gymnasiet handler om færdigheder, også er en smule mere tilbøjelige til at give tyngdepunktet mere end 2/3-tyngde.

I tabel 8.49 er samme opgørelse lavet for tyngdepunktet *problemløsning* (b). Her ses at den færdighedsorienterede fagidentitet D er en smule mindre tilbøjelige til at ligge over 2/3 tyngde. Det skal dog undersreges at for fagidentitet D og især B og C er populationerne så små, at de viste afvigelser ikke er signifikante.

a	Alle	A	B	C	D
<1/3	0%	0%	0%	0%	0%
1/3-2/3	17%	18%	16%	25%	10%
>2/3	83%	82%	84%	75%	90%

8.48) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt a

b	Alle	A	B	C	D
<1/3	2%	3%	0%	0%	3%
1/3-2/3	69%	66%	68%	75%	76%
>2/3	28%	32%	32%	25%	21%

8.49) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt b

I tabel 8.50 og 8.51 er opgørelsen lavet for tyngdepunkterne *ræsonneret retfærdiggørelse* (c) og *teoriforståelse* (d). Begge steder kan det ses at der indenfor fagidentitet C er en smule mere tilbøjelighed til at ligge over 2/3 i tyngde end for de øvrige.

c	Alle	A	B	C	D
<1/3	10%	11%	11%	13%	7%
1/3-2/3	80%	79%	79%	69%	86%
>2/3	10%	10%	11%	19%	7%

8.50) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt c

d	Alle	A	B	C	D
<1/3	0%	0%	0%	0%	0%
1/3-2/3	52%	51%	58%	44%	55%
>2/3	48%	49%	42%	56%	45%

8.51) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt d

Endeligt er opgørelsen i tabel 8.52 og 8.53 lavet for tyngdepunkterne *begrebskendskab* (e) og *konventionskendskab* (f). Det ses at tilhængere af fagidentitet D, som blev præsenteret med parolen ”matematik er et sprog”, faktisk er lidt mindre tilbøjelige til at give over 2/3 tyngde til *begrebskendskab* end populationen som helhed. Ellers der ikke så mange relevante variationer her, hvor især *konventionskendskab* lider under manglende ”vægt” i den indsamlede empiri.

e	Alle	A	B	C	D
<1/3	3%	3%	0%	6%	3%
1/3-2/3	53%	49%	58%	44%	62%
>2/3	45%	48%	42%	50%	34%

8.52) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt e

f	Alle	A	B	C	D
<1/3	0%	0%	0%	0%	0%
1/3-2/3	28%	30%	32%	25%	24%
>2/3	72%	70%	68%	75%	76%

8.53) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt f

Anvendelsesdimensionen (i, j, k og l)

Som det fremgik af tabel 8.47 ovenfor, er anvendelsesdimensionen i snit vurderet til lidt under 1/2, hvilket er noget lavere end teoridimensionen der i snit er vurderet lidt under 2/3. Tyngdepunkterne *illustration* (i) og *motivation* (j) får i gennemsnit den største tyngde, idet det skal huskes, at førstnævnte indgår i materialet med meget lille vægt (jf tabel 8.44). Noget lavere tyngde tillægges tyngdepunktet *service* (k) og mindst tyngde af alle tyngdepunkter får tyngdepunktet *værktøj* (l). Der synes altså her at tegne sig nogle klare fagidentitetsbaserede fravalg blandt respondenterne. Anvendelsesdimensionen synes at nyde en stor opbakning så længe den anvendte kontekst alene sætter nogle rammer for aktiviteterne og matematikfaget selv styrer indholdet. Men hvis konteksten overtager styringen af indholdet, så bliver det pludselig kontroversielt.

Ser man på den gennemsnitlige tyngde i anvendelsesdimensionen inden for hver af de fire grupper af deklarerede fagidentiteter ses det, at respondenterne tilsluttet den anvendelsesorienterede fagidentitet B i gennemsnit placerer en smule mere tyngde i anvendelsesdimensionen. Dette gælder for alle fire tyngdepunkter i anvendelsesdimensionen, hvor især den ekstra tyngde i tyngdepunktet *værktøj* (l) er særligt relevant. Samtidig ses det at der for tyngdepunktet *motivation* (j) er mindre tyngde end gennemsnittet blandt tilhængerne af fagidentitet C. Dette er nogenlunde som forventet.

I tabel 8.54 og 8.55 ses fordelingen af tyngder for tyngdepunkterne *illustration* (i) og *motivation* (j). Da *illustration* har en meget lille vægt i undersøgelsen, har informationerne her begrænset gyldighed. Det ses dog at der inden for fagidentitet B er langt større tilbøjelighed til at give dette tyngdepunkt over 2/3 tyngde, end for de øvrige.

Også for tyngdepunktet *motivation* ses det, at tilhængerne af fagidentitet B er mere tilbøjelige til at give over 2/3, mens tilhængerne af fagidentitet C er klart mindre tilbøjelige til det. Dette er interessant fordi netop dette tyngdepunkt i afsnit 5.2.2 viste sig at have en vis tyngde i den aktuelle fagidentitet på systemdomænet - især når det handler om de skriftlige eksamensopgaver. Forskellen i vurdering mellem fagidentitet B og C kan altså vise en ret aktuel forskel i indstillingen blandt grupper af gymnasielærere. Det er dog værd at bemærke at kun én respondent har givet tyngdepunktet under 1/3 tyngde. Intet tyder således på at der findes en generel og stærk modstand imod at dette tyngdepunkt fylder i fagets identitet i gymnasieskolen.

i	Alle	A	B	C	D
<1/3	7%	5%	0%	13%	14%
1/3-2/3	52%	53%	37%	63%	52%
>2/3	41%	41%	63%	25%	34%

8.54) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt i

j	Alle	A	B	C	D
<1/3	1%	0%	0%	0%	3%
1/3-2/3	43%	45%	26%	63%	38%
>2/3	56%	55%	74%	38%	59%

8.55) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt j

I tabel 8.56 og 8.57 ses fordelingen af tyngder i hhv. *service* (k) og *værktøj* (l). For *service*-tyngdepunktet ses det at stort set alle respondenter ligger på en tyngde mellem 1/3 og 2/3, mens afvigelserne fra dette er ret begrænset. For *værktøj*-tyngdepunktet ses at tilhængerne af fagidentitet B og C er mere tilbøjelige til at give tyngde over 1/3 end generelt. Dette kan virke overraskende, men går man ind og kigger på de faktiske tyngder over 1/3, er de væsentligt større for fagidentitet B (6 af 11 er over 0,45) end for C (1 af 8 er over 0,45).

k	Alle	A	B	C	D
<1/3	9%	10%	5%	6%	14%
1/3-2/3	85%	86%	84%	88%	83%
>2/3	5%	4%	11%	6%	3%

8.56) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt k

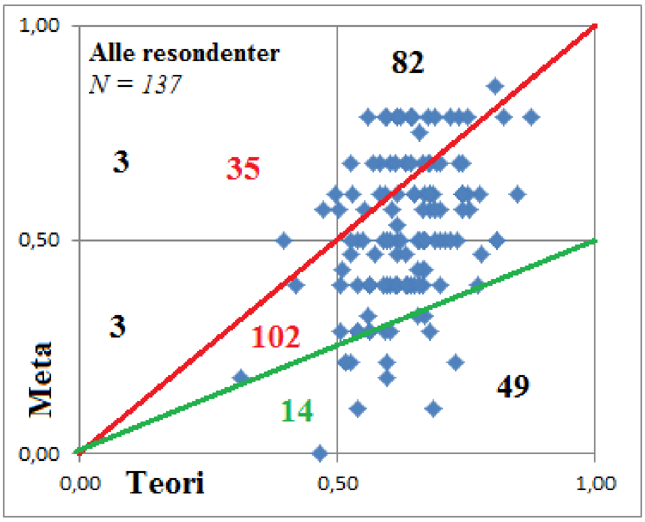
l	Alle	A	B	C	D
<1/3	59%	62%	47%	50%	66%
1/3-2/3	40%	38%	47%	50%	34%
>2/3	1%	0%	5%	0%	0%

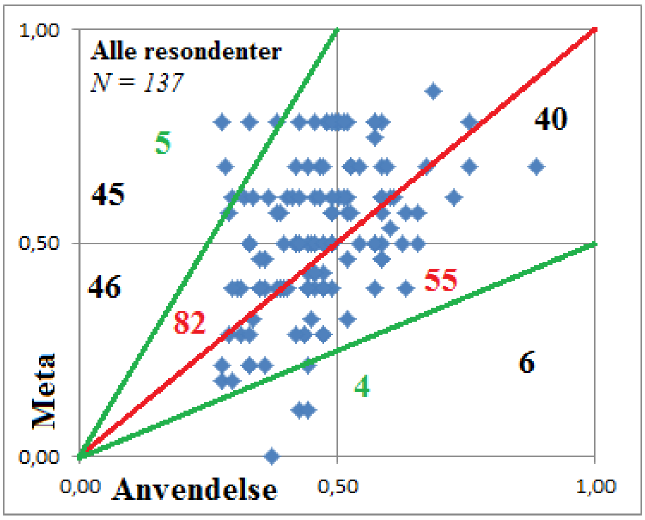
8.57) Fordeling af tyngder for tyngdepunkt l

Meta-dimensionen (r, s og t)

Hidtil er meta-dimensionen ikke blevet berørt. Det skyldes at den gennemførte undersøgelse i hovedsagen ikke har være designet til at udtale sig om denne dimension, hvilket ses af de ret små vægte som både dimensionen som helhed og dens tre tyngdepunkter enkeltvis har (se tabel 8.44). I dette afsnit vil det dog kort blive berørt hvad dataene dog siger om sagen.

På figur 8.58 er respondenternes samlede tyngde i metadimensionen plottet op imod hhv. samlet tyngde i teoridimensionen og samlet tyngde i anvendelsesdimensionen. Figuren skal læses på samme måde som figur 8.45. Det svage datagrundlag for analyse af metadimensionen ses ved en tydelig diskretering af værdierne. Punkterne ligger i høj grad på bestemte vandrette linjer.



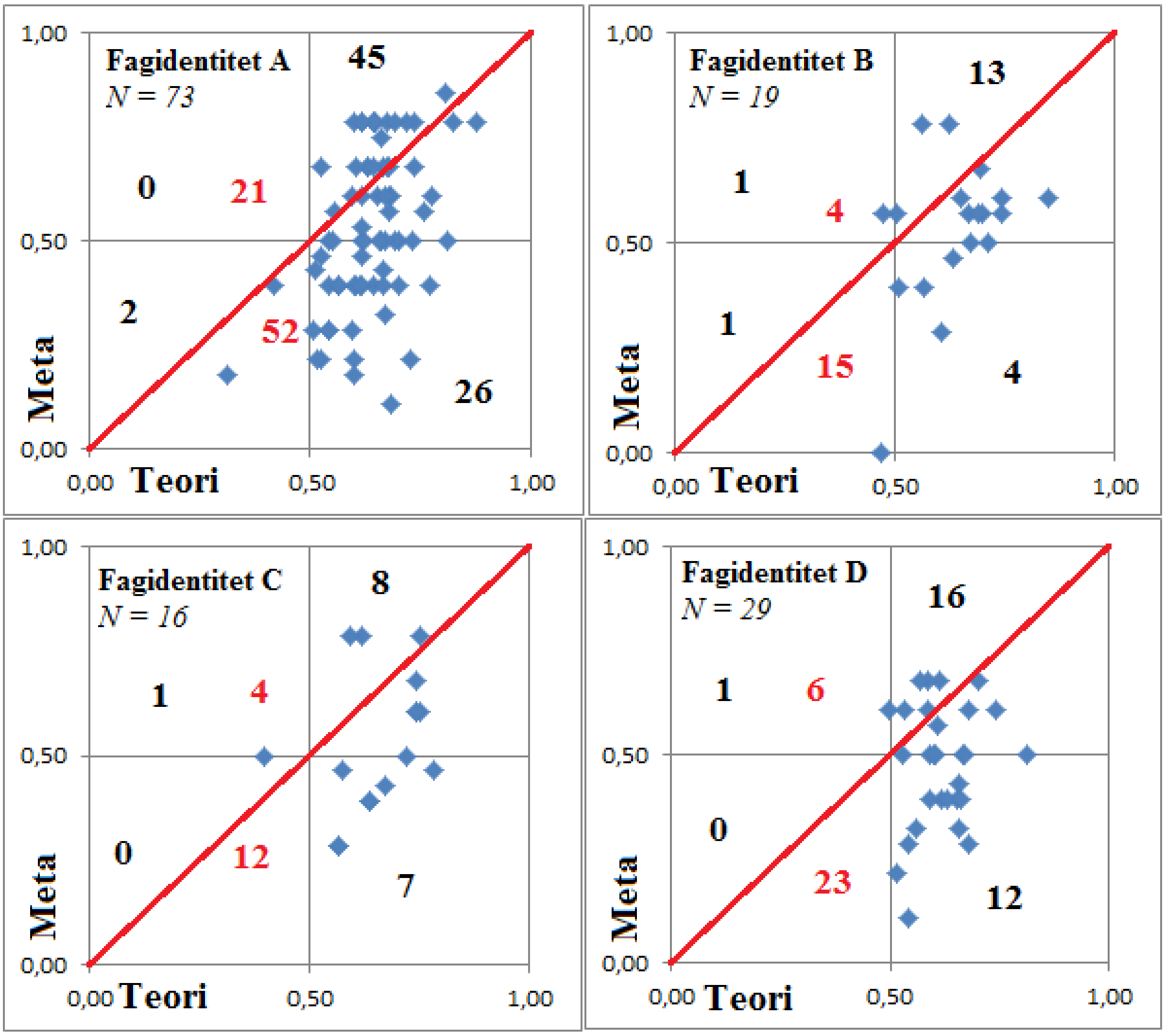


8.58) Plot af tyngde i teori- og metadimensionen samt anvendelse- og metadimensionen for alle respondenter.

Det ses af figuren at der ikke er nogen klar sammenhæng mellem tyngde i teori- og metadimensionen. Punkterne er jævnt fordelt omkring 0,5-linjen for metadimensionen og jævnt fordelt til højre for 0,5-linjen for teori-dimensionen. Det kan dog bemærkes at de fleste respondenter ligger under den røde linje og derfor har mere tyngde i teori-dimensionen end i meta-dimensionen.

Der synes til gengæld at være en sammenhæng mellem tyngde i meta- og anvendelsesdimensionen. Respondenter med tyngde under 0,5 i anvendelses-dimensionen er jævnt fordelt omkring 0,5-linjen for meta-dimensionen, mens stort set alle respondenter med over 0,5 i tyngde i anvendelsesdimensionen også har tyngde på over 0,5 i meta-dimensionen. Der synes altså at være en signifikant sammenhæng mellem stor tyngde i anvendelse- og stor tyngde i meta-dimensionen, men omvendt hænger stor tyngde i meta-dimensionen ikke sammen med stor tyngde i anvendelse-dimensionen.

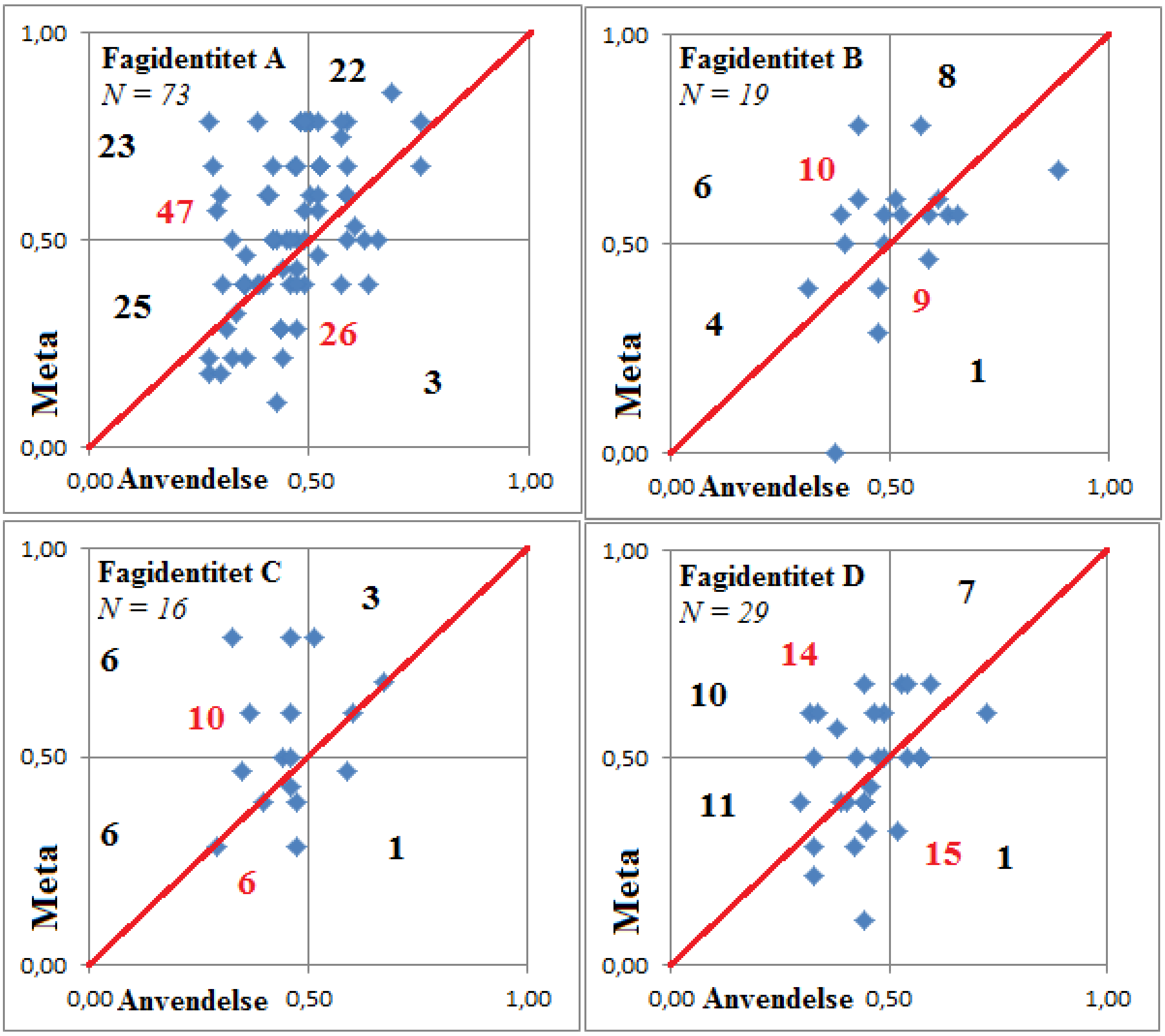
På figur 8.59 er respondenternes tyngde i teori- og metadimensionen plottet op mod hinanden fordelt på respondenter efter tilslutning til de fire deklarerede fagidentiteter.



8.59) Plot af tyngde i teori- og metadimensionen opdelt efter deklareret fagidentitet.

Billedet viser at respondenter der placerer relativt lille tyngde (under 0,4) i metadimensionen primært har tilsluttet sig fagidentiteterne A og D. Undtagelsen fra dette er en enkelt respondent tilsluttet fagidentitet B, som har tyngden 0 i metadimensionen. Denne ene respondent har formentlig ikke svaret seriøst på spørgsmålene om fagligt samspil - ellers er der i hvert fald tale om en meget unik fagidentitet. Billedet viser således at respondenter tilsluttet fagidentitet B og C generelt vægter meta-dimensionen rimelig højt. Dette kan muligvis forklares med at matematikaktiviteter med stor tyngde i meta-dimensionen ofte også har tydelig tyngde i enten anvendelses- eller teori-dimensionen.

På figur 8.60 er respondenternes tyngde i meta- og anvendelses-dimensionen holdt op imod hinanden, opdelt efter de fire deklarerede fagidentiteter.



8.60) Plot af tyngde i anvendelses- og metadimensionen opdelt efter deklareret fagidentitet.

Sammenhængen hvor stor tyngde i anvendelsesdimensionen betyder stor tyngde i metadimensionen genfindes inden for alle fire fagidentitets-grupper. Der er meget få respondenter som lander i feltet i nederste højre hjørne, mens de fleste er fordelt rimelig jævnt mellem de øvrige tre felter. Denne sammenhæng er en vigtig observation. Samtidig ses det at for fagidentiteterne A og C er der en overvægt af respondenter som har mere tyngde i meta-dimensionen end i anvendelsesdimensionen, mens det for fagidentiteterne B og D er en lige fordeling af respondenter som har den ene tungere end den anden.

Ser man i tabel 8.47 ses det, at respondenterne i gennemsnit har lagt omtrent halvdelen af tyngden i meta-dimensionen, samt at respondenter tilsluttet fagidentitet D har lagt en lille smule mindre end de øvrige. Dette ses i alle dimensionens tre tyngdepunkter *intern refleksion* (r), *videnskabsteori* (s) og *samfundsfunktion* (t), hvor disse respondenter har lagt lidt mindre tyngde end de øvrige. Særlig tydeligt er det ved den sidstnævnte.

Det ses endvidere at respondenter tilsluttet fagidentiteterne A og især B har lagt mere tyngde end gennemsnittet i *samfundsfunktion*, mens respondenter tilsluttet fagidentitet C har lagt en smule ekstra tyngde i *intern refleksion*. Denne forskel passer formentlig med hvordan disse tyngdepunkter i meta-dimensionen kobler med hhv. teori- og anvendelsesdimensionen. Det er dog vigtigt at huske, at konklusioner om meta-dimensionen bygger på et ret spinkelt og usikkert empirisk materiale.

8.5 Sammenfatning

Overordnet set viser analysen af undervisernes reaktioner på de forskellige matematikaktiviteter, at langt hovedparten af respondenterne har en fagidentitet med et balanceret forhold mellem tyngde i teori-dimensionen og tyngde i anvendelses-dimensionen. Balancen er dog sådan, at hovedparten af respondenterne har en større tyngde i teoridimensionen end i anvendelsesdimensionen. 94% af samtlige respondenter (126 ud af 137) er således vurderet at have mere tyngde i teori-dimensionen end anvendelsesdimensionen, men dog mindre end dobbelt så meget. De resterende respondenter fordeler sig jævnt med 6 der har større tyngde i anvendelsesdimensionen end i teoridimensionen og 5 med over dobbelt så stor tyngde i teoridimensionen som i anvendelsesdimensionen.

Omkring en tredjedel af respondenterne har placeret over halvdelen af den mulige tyngde i anvendelsesdimensionen, mens to tredjedele har placeret mindre - dog ingen under en fjerdedel af den mulige tyngde. Det viser at ingen respondent har lavet en principiel afvisning af anvendelsesdimensionen som en del af deres fagidentitet.

Blot 6 respondenter har placeret mindre end halvdelen af den mulige tyngde i teoridimensionen. Disse har også alle placeret under halvdelen af den mulige tyngde i anvendelsesdimensionen. Dette kan altså tolkes sådan at disse 6 respondenter har en fagidentitet som ikke vægter de to dimensioner specielt højt. Der er dog også den mulighed at det har en metodisk forklaring i, at disse seks respondenter generelt har været afvisende overfor de fremviste matematikaktiviteter af andre årsager end indholdet, hvorfor de generelt har afvist de fleste.

Hvis man sammenligner den *analytiske* fagidentitet som er blevet konstrueret i dette kapitel med de *deklarerede* fagidentiteter som blev konstrueret i kapitel 7, så er det overordnede indtryk at der er en høj grad af konsistens mellem deklaration og svarmønster. Hovedparten af respondenterne har tilsluttet sig den balancerede fagidentitet A, hvilket matcher det overordnede mønster fint.

En relativt lille andel har tilsluttet sig fagidentitet C. Hvis man kigger på det analytiske billede kunne denne gruppe godt have været større. Generelt vurderer respondenterne teoridimensionen højere end anvendelsesdimensionen. Omvendt har ingen respondent prioriteret anvendelsesdimensionen meget lavt og som sådan er den rene teori-fagidentitet slet ikke observeret.

Ingen respondent har kombineret en høj tyngde i anvendelses-dimensionen med en lille tyngde i teori-dimensionen. Der synes altså ikke at eksisterer en fagidentitet hvor fokus lægger sig entydigt på det anvendte og det teoretiske fundament skubbes i baggrunden. Fraværet af sådanne fagidentiteter er ikke overraskende, men altså her påvist. De respondenter som faktisk kunne siges at høre til fagidentitet B har altså samtidig stor tyngde i teori-dimensionen og kunne som sådan lige så godt have hørt til fagidentitet A. Konflikten er formentlig, at selv matematiklærere som er klart orienteret mod matematik som et værktøj ser den matematiske teori som en nødvendig komponent i denne brug. Og værktøjs-identiteten er således især præget af stor tyngde i anvendelses-dimensionen, men ikke af lille tyngde i teori-dimensionen.

Analyserne gennem hele kapitlet har vist, at delpopulationerne som har tilsluttet sig fagidentiteterne C og B har svarmønstre der følger denne tilkendegivelse. Dermed ikke sagt at denne konsistens altid kan genfindes på individniveau. Men som helhed agerer disse delpopulationer altså konsistent med deres deklaration. Denne observation er med til at understøtte at det virker relevant at tale om *fagidentiteter* som noget der faktisk eksisterer og som har indvirkning på praksis.

Samtidig har analysen flere steder dokumenteret, at fagidentitet som forklaring indgår i vekselvirkninger med mindst to andre typer af forklaringsmønstre. Det ene er undervisernes syn på det *faglige niveau*. Altså at problemstillinger i højere grad vurderes efter hvor svære de er at udføre, end hvor vidt respondenten mener at problemstillingen er væsentlig for matematikfaget. Dette kommer især til udtryk ved respondenter der mener niveauet er for lavt, men også nogle der mener det er for højt. Samtidig med dette hører en tredje forklaringsform, som kan kaldes *pædagogisk pragmatik*. Underviseren mener måske nok at niveau og indhold er passende, men afviser alligevel fordi det vurderes af forskellige grunde ikke at kunne gennemføres med de elever der nu engang befinder sig i gymnasieskolen. Disse to konkurrerende forklaringsformer er vigtige forbehold for den benyttede metode.

Ser man på de enkelte tyngdepunkter er det særligt værd at bemærke at respondenterne i høj grad mener at *færdighedstræning* er centralt, fulgt af *teoriforståelse* og *begrebskendskab*. Lidt overraskende ser det ud til at den *ræsonnerede retfærdiggørelse* vægtes lavere.

Det er endvidere værd at bemærke at særligt tyngdepunktet *motivation* findes tungt i anvendelsesdimensionen, mens *service* og i endnu højere grad *værktøj* gives en meget lille tyngde. Dette er udtryk for at der på den ene side virker til at være stor forståelse for at matematik udfolder sig inden for rammer fastlagt af en ”ydre” kontekst, men samtidig en stor modstand mod at det faglige indhold skal underordnes denne kontekst.

Endeligt viser analysen at der ikke synes at være nogen sammenhæng mellem tyngde i teori-dimensionen og tyngde i meta-dimensionen. Til gengæld synes der at være en tydeligt sammenhæng mellem stor tyngde i anvendelses-dimensionen og stor tyngde i meta-dimensionen. En sammenhæng der dog ikke omvendt betyder at stor tyngde i meta-dimensionen nødvendigvis hænger sammen med stor tyngde i anvendelse-dimensionen.

Den samlede konklusion her er altså, at fagidentitetsbegrebet med forbehold kan siges at vise noget væsentligt om underviseres tilgang til faget. Samt at der til en vis grad er konsistens mellem underviserens deklaration af fagidentitet og den stilling personen tager i konkrete situationer.

9 Diskussion - konklusion - perspektiv

Dette er afhandlingens sidste kapitel, som vil adressere tre afgørende pointer i de følgende tre afsnit. For det første afgive en konklusion på det forskningsspørgsmål der blev opstillet, herunder diskutere afhandlingens bidrag til de to delspørgsmål hvis besvarelse er fundamentet for konklusionen på det egentlige forskningsspørgsmål. For det andet at foretage en vurdering af rækkevidden på konklusionen, med afsæt i den metode og de valg som er truffet omkring arbejdet med afhandlingen. Og for det tredje at drage nogle perspektiver for gymnasieskolens matematikfag i forhold til afhandlingens resultater, som kan bidrage til at bringe gymnasiematematikfaget videre.

9.1 Konklusion - svar på forskningsspørgsmål

Afhandlingen har været struktureret med det formål at give svar på forskningsspørgsmålet:

Hvilke fagidentiteter dominerer i dag gymnasiematematikfaget?

For at svare på dette har det som afklaret i kapitel 1 været nødvendigt at give et meningsfuldt indhold til begrebet *fagidentitet*. Ikke bare i en overordnet beskrivelse af hvilken type objekt der er tale om, men også i form af nogle komponenter, som gør det muligt at beskrive eksemplarer af objektet samt meningsfuldt skelne mellem forskellige eksemplarer. Dette arbejde har i hovedsagen været analytisk, men med empiriske bidrag til at godtgøre at begrebet faktisk gav mening. Arbejdet med dette er afrundet i afsnit 9.1.1.

Det har endvidere været nødvendigt at afgrænse hvor henne i det omfattende system vi kalder *gymnasieskolen* der skulle kigges efter sådanne fagidentiteter, for så at vurdere hvilke(n) fagidentitet(er) der kunne fås øje på og vurdere hvilket styrkeforhold der eventuelt er i mellem dem. Dette arbejde afrundes i afsnit 9.1.2.

På baggrund af afrundingen på de to delspørgsmål, diskuteres det i afsnit 9.1.3 hvilket svar afhandlingen kan give på det opstillede forskningsspørgsmål og på den baggrund trækkes der en endelig konklusion op i afsnit 9.1.4, herunder en række resultater - *findings* - som afhandlingen hævder at kunne ”slå fast”.

9.1.1 Delspørgsmål 1: Fagidentitet som analytisk begrebsapparat

Det første delspørgsmål til forskningsspørgsmålet blev i kapitel 1 formuleret som:

> *Hvad skal/kan der forstås ved ”en identitet for gymnasiematematikfaget” og hvilke identiteter kan der formuleres fra et analytisk udgangspunkt.*

I kapitel 3 blev dette delspørgsmål foldet ud og diskuteret. Definitionen på ”en fagidentitet” blev her formuleret:

> *Et helhedssyn på hvilke objekter og problemstillinger der kan behandles selvstændigt i faget.*

Det centrale ved fagidentitet er altså koblingen til ”objekter og problemstillinger”. Ordet identitet i sig selv kan lede til en bred vifte af psykologiske fænomener. Fra de empiriske undersøgelser kan det f.eks. ses at der til en fagpersons identitet kan knytte sig bestemte praktiske markører, som f.eks. ”papir og blyant” overfor ”computer” eller ”tavle og kridt” overfor ”lærred og projektor”. Et bredere og mere psykologisk orienteret identitetsbegreb kunne have indeholdt sådanne præferencer. Men fokus har altså her været skarpt på *indholdet* i faget, det vil sige den praktiske udmøntning af hvilke objekter, problemstillinger, mv. der kan behandles. En fagidentitet bliver altså en slags filter for hvilket indhold der regnes for hørende til faget og dermed også hvilket indhold der ikke gør.

For at kunne skelne forskellige fagidentiteter fra hinanden, blev der udviklet et system af begreber. Her blev der valgt en begrebsmodel. En fagidentitet for matematik (i gymnasieskolen) forstås i første omgang som udspændt af tre dimensioner. En teori-dimension som dækker forskellige aspekter af det at arbejde *i* matematikken, en *anvendelses*-dimension som dækker forskellige aspekter af det at arbejde *med* matematikken og endeligt en *meta*-dimension som dækker forskellige aspekter af det at arbejde *om* matematikken. For endvidere at nuancere disse dimensioner, beskrives de hver især som indeholdende en række ikke-ordnede tyngdepunkter. Det er således forskellen mellem tyngde i de forskellige tyngdepunkter som udgør den principielle forskel mellem to fagidentiteter.

De tre dimensioner og deres tilhørende tyngdepunkter er sammenfattet i tabel 9.1. For uddybende forklaring af de forskellige tyngdepunkter henvises til afsnit 3.6:

***I*-dimension**	***Med*-dimension**	***Om*-dimension**
a) Færdighedstræning	i) Illustration	r) Intern refleksion
b) Problemløsning	j) Motivation	s) Videnskabsteori
c) Ræsonneret retfærdiggørelse	k) Service	t) Samfundsfunktion
d) Teoriforståelse	l) Værktøj	
e) Begrebskendskab		
f) Konventionskendskab		

9.1) Oversigt over de tre dimensioner og deres tyngdepunkter, som tilsammen udspænder en fagidentitet for matematik.

En mulig brug af fagidentitetsbegrebet er at fokusere på vægtningen mellem dimensionerne. Det gør det f.eks. muligt at stille skarpt på den klassiske modsætning ”teori vs. anvendelse”. Her lader man de forskellige tyngdepunkter smelte sammen til én samlet tyngde. Som en overfladisk betragtning kan man altså skelne mellem ”stor” og ”lille” tyngde i hver af de tre dimensioner. Dette vil give otte analytiske fagidentiteter - eller fire hvis man indskrænker sig til teori- og anvendelsesdimensionen.

Det er netop sådanne fire analytiske fagidentiteter som i den empiriske undersøgelse blev søgt opstillet som ”fagidentitet A, B, C og D”. Respondenternes valg mellem disse fire fagidentiteter viste at der var tale om et meningsfuldt valg. Særligt de som havde valgte de to muligheder hvor den ene dimension vægtes med ”stor tyngde” og den anden med ”lille tyngde” viste sig efterfølgende overordnet set at svare konsistent på en række både direkte og indirekte afprøvninger af deres fagidentitet. Dette kan ses som understøttende for begrebets analytiske og empiriske relevans.

Samtidig har empiriske undersøgelser af systemdokumenter og lærebøger vist, at disse kunne beskrives meningsfuldt med det opstillede begrebsapparat. Det er sket ved at indføre det metodiske begreb *identitetsbidrag*, som dækkende for et fagidentitets-atom. Det vil sige et lille udsnit af den analyserede genstand, som ikke på fornuftig vis kan deles i mindre udsnit, og som enkeltvis kan analyseres for hvilke tyngdepunkter de bidrager med tyngde til. Den analyserede genstands fagidentitet har således kunnet findes som summen af tyngderne i identitetsbidragene.

I denne proces har det været muligt at lave en rimelig klar vurdering af hvert eneste identitetsbidrag og aggregere dette til en samlet fagidentitet. Disse fagidentiteter har vist sig konsistente og kunnet beskrive f.eks. historiske forandringer mellem en række forskellige historiske perioder. Det i skema 9.1 opstillede begrebsapparat beskriver altså relevante forhold omkring gymnasiematematikfaget.

Det er her fornuftigt at fremhæve, at der ikke umiddelbart er noget der synes at forhindre at dette fagidentitetsbegreb kan udvides til at beskrive manifestationer af matematikfaget mere generelt. Det vil naturligvis kræve særskilte studier af f.eks. folkeskole, læreruddannelse, universiteter og matematik som forskningsfelt at slå dette helt fast. Men det forekommer oplagt at dette kan gøres.

9.1.2 Delspørgsmål 2: Hvilke fagidentiteter eksisterer i gymnasieskolen

Det andet delspørgsmål til forskningsspørgsmålet blev i kapitel 1 formuleret som:

> *Hvilke identiteter eksisterer der på følgende tre centrale "delområder" af gymnasiematematikfaget og hvilken styrke har de hver især på hvert område: A) systemet, B) lærebøgerne og C) underviserne.*

En egenskab ved begrebet *fagidentitet* har været, at det ikke kun skulle indfange en rent kognitiv størrelse hos levende mennesker. Det skulle netop være et begreb der kunne beskrive manifestationer af matematikfaget på andre typer af domæner. Tre centrale sådanne domæner for gymnasiematematikfaget blev afgjort til at være *systemet* omkring undervisningen, *lærebøgerne* som bruges i undervisningen og *underviserne* som tilrettelægger og udfører undervisningen. Den realiserede eller manifesterede fagidentitet som gymnasieskolens elever oplever i hverdagen bliver til i et krydsfelt mellem disse tre. Andre domæner kunne naturligvis også have været undersøgt. F.eks. det matematikfaglige miljø som helhed, forskellige aspekter af folkeskolen, osv.

Det har været valgt at de to første domænetyper - *systemet* og *lærebøger* - skulle analyseres på en række historiske tidspunkter, defineret af centrale gymnasiereformer indført med effekt fra 1935, 1961, 1988 og den aktuelle fra 2005[10]. Det historiske aspekt skal dels dokumentere af fagidentiteter er variable over tid, dels give baggrundsviden til senere diskussioner om undervisernes egen uddannelsesmæssige baggrund.

System-domænet

Analysen af *system*-domænet har haft fokus på to typer af empiri-genstande. Dels *forudstyrende dokumenter* som bekendtgørelse, læreplan, vejledning, mv. og dels *bagudstyrende dokumenter* som

[10] I skrivende stund foreligger en netop indgået politisk aftale om en reform eller en større justering af 2005-refornen, som skal træde i kraft i 2017. I hvilket omfang dette vil give anledning til en ny system-identitet eller blot justeringer som dem der skete i 1953, 1971 og til dels 1999, er det endnu for tidligt at sige noget om.

i det væsentlige er skriftlige eksamensopgaver. Her er naturligvis valgt en række ting fra, men de udvalgte har været vurderet som de vigtigste og mest betydelige. Særligt de skriftlige eksamensopgaver har været tillagt stor betydning på grund af disses karakter af at være fælles for (næsten) alle gymnasieelever og dermed en effektiv rettesnor for hvad undervisningen skal leve op til.

Analysen blev foretaget ved opdeling af dokumenterne i identitetsbidrag, som alle blev vurderet med ”stor”, ”mellem”, ”lille” og ”ingen” tyngde i de forskellige tyngdepunkter. Angivelsen af tyngde i et tyngdepunkt sker ved at skrive tyngdepunktets bogstav (se tabel 9.1) med en typografi der passer til tyngden. Fed skrift angiver ”stor tyngde”, normal skrift angiver ”mellem tyngde”, kursiv skrift angiver ”lille tyngde” og fravær af bogstavet angiver at tyngdepunktet ikke er tillagt nogen signifikant tyngde. Analysen af de fire perioder gav således det billede som er optegnet i tabel 9.2.

Periode	**Teori**	**Anvendelse**	**Meta**
1935/1953	**a**, e, *c*, *d*	*k*	-
1961/1971	**a**, e, c, f, *b*	*k*	*r*
1988/1999	**a**, e, b, *d*	j, i	*r*
2005/2010	**a**, e, b, d	j, i, *k*	r, *s*, *t*

9.2) Oversigt over de ved analyse viste fagidentiteter på system-domænet i hver af de fire tidsperioder.

Det ses at et gennemgående træk i hele perioden er stor tyngde i teoridimensionens tyngdepunkt *færdighedstræning* og sekundært *begrebskendskab*. Dette synes altså at være et kontinuert træk ved faget, selvom det faktiske indhold og især det faglige niveau er temmelig varierende i tid. Fagidentitets-begrebet har netop ikke fokus på det faglige niveau, men alene på karakteren af indholdet.

Det ses endvidere at variationerne i teoridimensionen over tid skal findes i en forskydning fra *ræsonneret retfærdiggørelse* til *problemløsning*, varierende tilstedeværelse af *teoriforståelse* og en opblomstring af *konventionskendskab* omkring 60’er-matematikken.

Den væsentligste udvikling historisk er imidlertid fremkomsten af tyngde i *anvendelses*- og *meta*-dimensionerne. I de to tidlige perioder er disse nærmest fraværende. På system-niveau begrænser det sig til hensigtserklæringer om at understøtte andre fag (særligt fysik) og til nedslag på matematikkens historie. I eksamensopgaverne er anvendelsesdimensionen stort set fraværende.

I nyere tid - tydeligere for 2005-reformen end 1988-reformen - dukker der imidlertid i stigende grad målsætninger om matematikanvendelse op. Og eksamensopgaver med anvendte kontekster ses allerede fra slutningen af 70’erne, men også her tager det for alvor fart med 2005-reformen. Det er særligt *motivation*- og *illustration*-tyngdepunkterne der får tyngde. Der ses også i mindre grad *service*-aspekter, mens tyngdepunktet *værktøj* er fraværende i alle fire perioder.

Med 2005-reformen begynder også *meta*-dimensionen at fylde markant mere, bl.a. fordi der kommer et formelt krav om at faget skal samspille med andre fag. Meta-aspektet kommer altså udover blot at være nedslag på fagets historie, til i højere grad at handle om at reflektere over indholdet i faget og dets metoder, dets forhold til andre fag og dets funktion i samfundet.

Hvad fagidentitetsbegrebet her *ikke* er i stand til at begribe, er de forandringer der sker med det faglige niveau, ikke mindst som følge af introduktionen af digitale værktøjer, herunder CAS-værktøjer.

Lærebogs-domænet

Lærebogs-domænet er mere kompliceret at analysere end system-domænet, fordi der eksisterer en stor mangfoldighed af lærebogssystemer og fordi et enkelt lærebogssystem er et langt mere omfattende materiale at analysere, end de officielle dokumenter der udspænder system-domænet. Der er således nødt til i første omgang at ske en drastisk reduktion i hvor mange lærebogssystemer der analyseres og derpå en klar reducering af hvor meget af de udvalgte lærebogssystemer der analyseres. I denne analyse har der været valgt et dominerende lærebogssystem fra 1935-reformen (*Andersen og Mogensen*) og fra 1961-reformen (*Kristensen og Rindung*) samt to dominerende lærebogssystemer fra 2005-reformen (*Carstens, Frandsen og Studsgaard* fra forlaget Systime og *Clausen, Schomacker og Tolnø* fra forlaget Gyldendal). Der er ikke analyseret lærebogssystemer fra 1988-reformens periode, da perioden ikke har et dominerende system og den derfor var oplagt at se bort fra når der skulle prioriteres.

Ved analysen af de fire lærebogssystemer blev der set på fire kapitler, som eksisterede i alle fire systemer. Dels ”første kapitel”, dels første kapitel omhandlende de faglige emner ”trigonometri”, ”funktioner” og ”differentialregning”. Hvert kapitel blev inddelt i identitetsbidrag som blev tildelt tyngder efter samme princip som for analysen af systemet. Dertil blev hvert identitetsbidrag tildelt en vægt i form af antallet af linjer det spændte over. Til sidste blev samtlige identitetsbidrag lagt sammen med den vægt de var tildelt. Ved opgørelsen fik et identitetsbidrag ét og kun ét tyngdepunkt med ”stor tyngde”. Den endelige opgørelse af fagidentiterne for de fire lærebogssystemer er således sket ved at vurdere hvor mange procent af disse vægtede ”stor tyngde”-bidrag der falder i hvert af tyngdepunkterne (i det anvendelses- og metadimensionerne slås sammen til en tyngde). Resultatet af analysen ses af tabel 9.3:

Lærebogssystem	**År**	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**	**f**	**M**	**O**
Andersen og Mogensen	1942	23%	0%	***31%***	***27%***	17%	1%	0%	0%
Kristensen og Rindung	1962	21%	2%	10%	***31%***	23%	12%	0%	0%
Systime	2005	***43%***	5%	4%	15%	***22%***	8%	0%	4%
Gyldendal	2005	***37%***	3%	5%	13%	***28%***	1%	7%	6%

9.3) Oversigt over de ved analyse viste fagidentiteter på lærebogs-domænet opdelt efter fire lærebogssystemer

Som det ses følger de historiske lærebøger ikke helt system-domænets fagidentitet med størst tyngde i *færdighedstræning* og næststørst i *begrebskendskab*. I stedet ligger den hos Andersen og Mogensen i *ræsonneret retfærdiggørelse* og *teoriforståelse*, som også på det samtidige system-domæne tillagdes en vis tyngde. Fraværet af tyngde i *problemløsning*, *konventionskendskab* samt hele *anvendelses*- og *meta*-dimensionen følger dog systemdomænets samtidige fagidentitet fuldstændig.

Ser man på Kristensen og Rindung genfinder man heller ikke her samme grad af tyngde i *færdighedstræning* og *begrebskendskab*, som der umiddelbart ses på systemdomænet. Og den store tyngde som lærebogssystemet har på teoriforståelse er umiddelbart helt i modstrid med analysen af det samtidige systemdomæne. Til gengæld er den nedtonede tyngde i *ræsonneret retfærdiggørelse* og den pludselige opblomstring af *konventionskendskab* helt i tråd med analysen af systemdomænet Det samme gælder fraværet af tyngde i *anvendelses*- og *meta*-dimensionen.

Skiftet fra lærebogssystemet Andersen og Mogensen fra 1942 til Kristensen og Rindung fra 1962 forekommer at være ganske interessant fra et fagidentitetsmæssigt synspunkt. Selvom begge lærebogssystemers fagidentitet stort set kun har tyngde i *teori*-dimensionen, så viser udspændingen i tyngdepunkter alligevel nogle tilsyneladende principielle forskelle. Andersen og Mogensen bygger fra starten af matematik deduktivt op. Med afsæt i det velkendte emne ”hele tal” opbygges og bevises en talteori, som lærebogen derefter bygger videre på. Kristensen og Rindung starter i stedet med at introducere mængdelære og udsagnslogik som en ny måde at notere det, som eleven forventes at vide i forvejen. En række opgaver i starten af systemet har således slet ikke til formål at tjekke og træne eleven i løsning af problemet, men derimod i at opskrive problemet og dets løsning efter den særlige notationskonvention der knytter sig til mængdelære og udsagnslogik. Dermed ikke påstået, at Kristensen og Rindung som lærebogssystem mangler stringens. Men blot for at illustrere at fagidentitetsbegrebet kan se sådanne forskelle i hvordan faget fremstilles.

De to aktuelle lærebogssystemer har begge deres største tyngde i *færdighedstræning* og *begrebskendskab*. Dette matcher fagidentiteten på systemdomænet ikke bare i deres samtid, men for alle fire perioder. Begge systemer har også en noget mindre tyngde i *teoriforståelse* end de to historiske systemer og tyngden i *ræsonneret retfærdiggørelse* er reduceret yderligere. Til gengæld er der vokset en lille - men dog synlig - tyngde frem i *problemløsning*.

Selvom de to lærebogssystemer således overordnet set har fagidentiteter som ligner hinanden, så ligger der alligevel en synlig forskel gemt i detaljen. Hvor Gyldendal-systemet har en synlig tyngde udenfor *teori*-dimensionen fordelt på *anvendelses*- og *meta*-dimensionen, så har systime-systemet langt mindre tyngde udenfor *teori*-dimensionen og denne er kun placeret i *meta*-dimensionen. Til gengæld har systime-systemet en synlig tyngde i *konventionskendskab.*

I en vis forstand trækker disse forskelle tråde bagud i tid. Systimes system kan forstås som en videreførelse af en lang serie af lærebøger af forfatterparret Carstensen og Frandsen, som forlaget har udsendt siden starten af 1980’erne. Denne serie kan godt forstås som et forsøg på at videreføre arven fra Kristensen og Rindung, men tilpasset og moderniseret til nye elevtyper. Omvendt kan Gyldendals system forstås som en videreførelse af systemet ”Ind i matematikken” som to af forfatterne - Schomacker og Clausen - udsendte sammen med Poul Printz på Munksgaards forlag (opkøbt af Gyldendal i starten af 00’erne) i forlængelse af 1988-reformen, formodentlig som et forsøg på at skabe et nyt lærebogssystem til et forandret matematikfag, med langt mere fokus på *anvendelses*- og *meta*-dimensionen.

De to lærebogssystemer hvis fagidentiteter af denne afhandling vurderes at være de to dominerende på lærebogs-domænet i den aktuelle situation, synes altså overordnet set at have *samme* fagidentitet, men bliver altså forskellige på grund af nogle vigtige detaljer. Forskellene på de to systemer kan altså forklares med visse linjer bagud i tid, mens ensheden formentlig kan forklares med at to ret forskellige lærebogstraditioner er søgt tilpasset samme reform i 2005.

Der er i øvrigt på dette sted fornuftigt at overveje relationen mellem system- og lærebogsdomænernes dominerende fagidentiteter. Hvor der for det aktuelle tilfælde med 2005-reformen synes at være en overordnet linje mellem systemets fagidentitet og lærebøgernes fagidentiteter, så var det mindre tydeligt for de to historiske lærebogssystemer. En forklaring på dette kan naturligvis have været uoverensstemmelser mellem aktørerne på systemdomænet og forfatterne til lærebøgerne. Imidlertid har der i hvert fald i tilfældet Kristensen og Rindung været et så stort overlap mellem systemaktører og lærebogsforfattere, at dette næppe er forklaringen.

En anden mulig forklaring er, at mængden af ord som aktørerne på systemdomænet bruger til at beskrive systemets forventninger til faget er vokset ganske betragteligt med tiden. I den ældre perioder er beskrivelserne således meget kortfattede. Det der på systemdomænet blot ser ud som et begreb der skal kendes, kan således i en lærebog blive udfoldet ganske betragteligt. Og systemaktørerne kan sagtens have haft denne udfoldning som hensigt, selvom det på det tidspunkt har været helt naturligt at underforstå den. Sådanne underforståetheder fanger den i denne afhandling benyttede metode ikke.

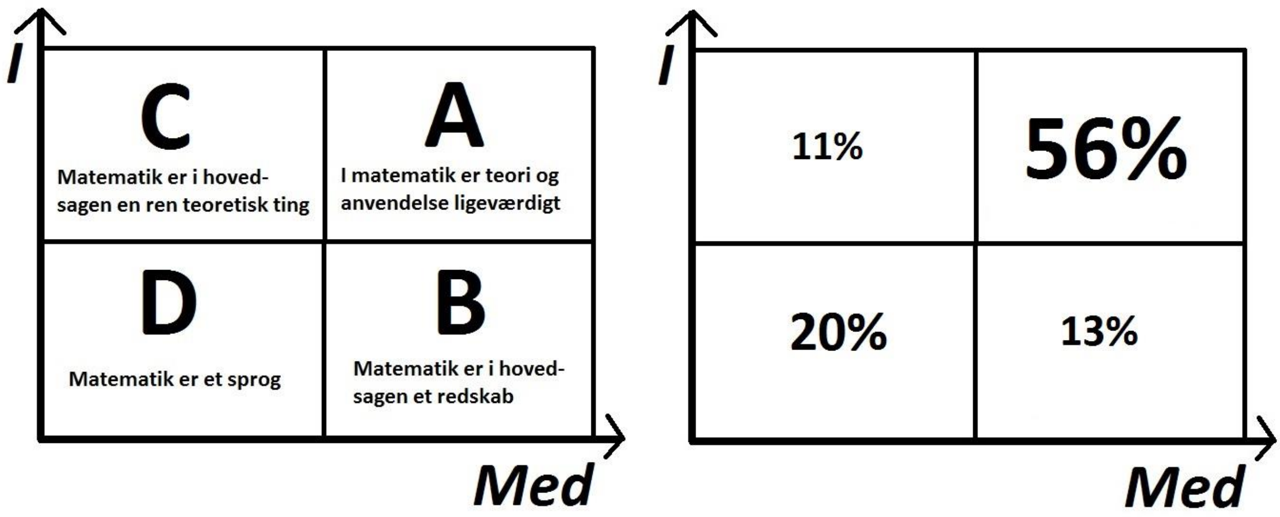
Overfor ovennævnte indvending kan man i øvrigt fremføre, at systemdomænet i høj grad er analyseret med afsæt i eksamensopgaverne. Og her afspejler den store teori-orientering i bøgerne sig ikke i indholdet i opgaverne. En tredje fortolkning kan således være, at lærebogsforfattere simpelthen har større ambitioner om hvad eleverne skal nå, end dem som laver eksamensopgaverne reelt tør teste. Der er således god grund til at mene, at den umiddelbart fremanalyserede forskel på fagidentiteten hos systemet i forhold til lærebogen er en reel uenighed. Og at denne uenighed er nedtonet i de mere aktuelle systemer, fordi målsætningen om at få elever til at bestå eksamen fylder mere.

Undervisere

Undervisere er naturligvis de mest komplekse domæner at undersøge. Dels er mængden af undervisere meget stor. Dels er den fagidentitet de gemmer på meget svært tilgængelig. Denne metodiske problemstilling har været diskuteret undervejs og vil også blive berørt i afsnit 9.2. Konklusionerne er dog baseret på en spørgeskemaundersøgelse blandt ca. 500 matematikundervisere, hvoraf 199 har svaret nok til at indgå i noget af konklusionen og 137 har svaret på næsten hele spørgeskemaet og derfor indgår i hele konklusionen.

Som forklaret i afsnit 9.1.1 har der oplagt kunnet opstilles fire forskellige analytiske fagidentiteter defineret efter ”stor”-”lille”-tyngde i hhv. teori- og anvendelsesdimensionen. Disse har været skrevet på tekstform og 199 respondenter har fordelt sig ud på dem, sådan som det er vist på figur 9.4.

Det viser sig at forespurgt direkte placerer over halvdelen (56%) af de adspurgte undervisere sig selv i en fagidentitet der deklarerer sig selv med en ligeværdig balance mellem *teori* og *anvendelse*. 11% deklarerer sig med en identitet der tydeligt overordner *teorien*, mens 13% deklarerer sig med en teori der tydeligt overordner *anvendelsen*. Endeligt har 20% deklareret sig selv med en identitet der forsøger at tale udenom begreberne ”teori” og ”anvendelse” ved at bruge den relativt almindelige metafor ”matematik er et sprog”. En stor andel - hvis ikke alle - af disse respondenter vil formentlig stejle over at blive kategoriseret med ”lille” tyngde på både en teori- og anvendelsesakse. Omvendt har de i valget mellem tre identiteter der var klare på disse dimensioner valgt den fjerde mulighed som var uklar. Og det er nok sådan dette valg skal forstås.



Figur 9.4) Analytiske fagidentiteter til venstre - respondenternes deklaration til højre.

I gennem en række direkte spørgsmål om respondenternes syn på forskellige forhold i gymnasieskolen, med særlig fokus på gymnasiereformen fra 2005, viser det sig at respondenterne overordnet set svarer konsistent med den fagidentitet de har deklareret sig med. Dette er især tydeligt for fagidentiteterne B og C. At der overordnet eksisterer en sådan konsistens, selvom den ikke eksisterer lige så tydeligt på individ-niveau, er et argument for at fagidentitets-begrebet faktisk har mening.

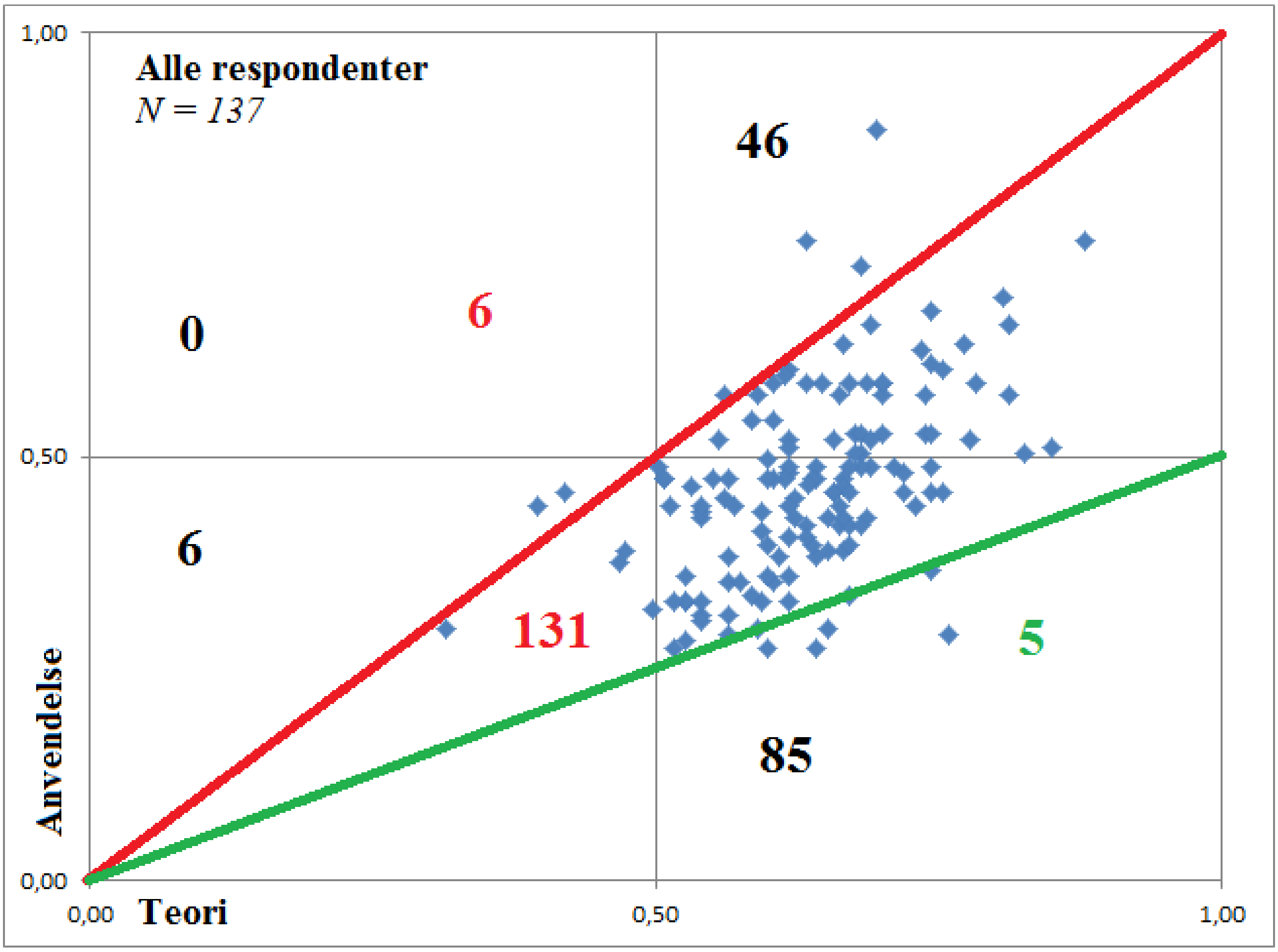
Et af de store metodiske problemer ved at spørge en respondent direkte om en fagidentitet er, at det netop kan ende med at blive tilkendegivelse af en ”identitet” i psykologisk forstand snarer end en faglig. Altså at respondenten gerne vil se sig selv som værende på en bestemt måde, eller opfatter sig som hørende sammen med ord der egentlig var valgt til at have en anden betydning. Samtidig med at respondenten i sin praksis viser sig at agere anderledes end det billede der tegnes ved eksplicitte spørgsmål. Derfor har respondenterne i undersøgelsen også været konfronteret med en række lakmusprøver i form af matematiske aktiviteter, som de har skullet vurdere på forskellig vis.

På baggrund af den enkeltes besvarelse er der - som redegjort for i afsnit 8.4 - sket en aggregering af svarene til en fagidentitet for hver enkelt respondent. De metodiske forbehold forbundet hermed diskuteres i afsnit 9.2.1. Ved at lægge tyngdepunkterne i de tre dimensioner sammen, giver det således mulighed for at tegne et billede i samme stil som det på figur 9.4.

På figur 9.5 er et sådan billede optegnet (se afsnit 8.4.1 for forklaring). Bemærk at akserne her er ombyttet i forhold til på figur 9.4. Her vælger ca. 1/3 stor tyngde i begge dimensioner, hvilket i en meget simpel oversættelse kunne sammenlignes med fagidentitet A. Lidt under to tredjedele vægter teoridimensionen højt og anvendelsesdimensionen lavt, svarende til fagidentitet C. En lille gruppe på ca. 4% har vægtet begge dimensioner lavt, svarende til fagidentitet D. Og ingen respondenter placeres sig ved analysen i fagidentitet B.

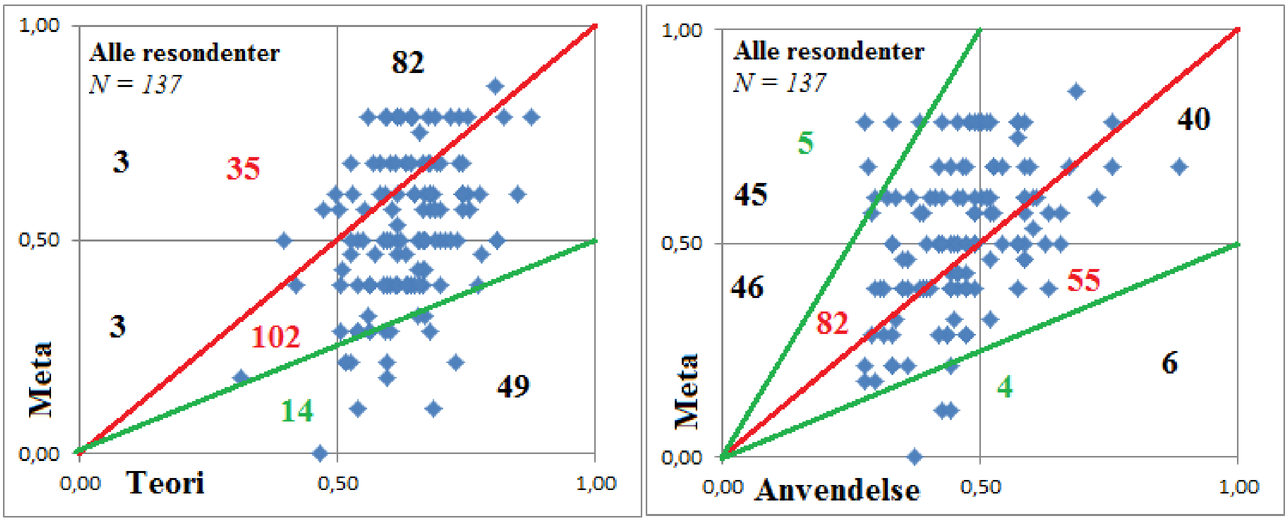
Denne fortolkning af resultaterne er formentlig for firkantet og tildeler metoden større præcision end den har. Samtidig bygger den på at grænsen mellem ”stor” og ”lille” tyngde sættes firkantet ved halvdelen af den mulige tyngde. Denne grænse kunne jo sættes andre steder også. Omvendt viser billedet at der er noget om snakken om en fordeling af forskellige fagidentiteter og at konflikten i høj grad findes i *anvendelsesdimensionen*. Hvor så godt som alle respondenter ligger i øverste halvdel af teoridimensionen, fordeler respondenterne sig mere ud i anvendelsesdimensionen. Det kan dog bemærkes at ingen har valgt anvendelsesdimensionen fuldstændig fra og kun meget få har valgt den til i meget høj grad.

Der tegner sig altså et overordnet billede af at de fleste undervisere har en fagidentitet hvor begge dimensioner synes at have betydelig tyngde, men at teoridimensionen for langt de fleste vægtes tungere end anvendelsesdimensionen uden at den vægtes meget tungere (mere end dobbelt tyngde).



9.5) Plot af tyngde i teori- og anvendelsesdimensionen for alle respondenter.

Ser man på *meta*-dimensionen er datagrundlaget for at sige noget om sagen langt mindre og dermed er konklusionerne også langt mere usikre. Respondenternes tyngder i *meta*-dimensionen fordeler sig over næsten hele den mulige spændvidde og uenighederne synes altså potentielt at være større her. Det viser sig på figur 9.6 at tyngden i metadimensionen er stort set uafhængig af tilslutningen til teoridimensionen. Modsat dette synes der at være en ret tydelig sammenhæng mellem det at have stor tyngde i *anvendelses*-dimensionen og så at have stor tyngde i *meta*-dimensionen. Sammenhængen synes dog ikke at pege den anden vej. Dette kan tyde på at personer med stor åbenhed overfor anvendelsesaspektet er generelt åbne overfor aktiviteter der afviger fra det rent teoretiske.



9.6) Plot af tyngde i teori- og metadimensionen samt anvendelse- og metadimensionen for alle respondenter.

I tabel 9.7 er den gennemsnitlige tyngde for alle respondenter i de enkelte tyngdepunkter samt for dimensionerne som helhed vist. Endvidere ses en "vægt" for hvert tyngdepunkt og dimension som viser hvor meget "tyngde" der maksimalt kunne opnås. Jo mindre dette tal er, jo mere usikker er vurderingen af tyngdepunktet.

Det ses at respondenterne i gennemsnit følger system-identiteten ganske godt. Mest tyngde er der i *færdighedstræning*. Dernæst følger i teoridimensionen *teoriforståelse*, *begrebskendskab* og *problemløsning*. Egentlig ligger *konventionskendskab* allerhøjest, men vægten for dette tyngdepunkt er rimelig lav og derfor kan det ikke regnes med som sikkert. Endeligt vurderes *ræsonneret retfærdiggørelse* forholdsvis lavt, hvilket også passer med system-identiteten.

I anvendelsesdimensionen ses det at den største tyngde lander i *motivation*. Altså i det synspunkt at en anvendt kontekst er velkommen til at sætte rammerne om en opgave, så længe matematikfagets egen dagsorden får lov at styre indholdet. Der ses en noget lavere tilslutning til *service*-tyngdepunktet, hvor konteksten styrer opgavens indhold og matematikfaget alene sætter rammerne for hvilke spørgsmål der kan stilles. Og helt i bund er tilslutningen til *værktøj*, som er det tyngdepunkt hvor matematik kan kastes ind i en situation hvor både indhold og ramme styres af konteksten og hvor matematik selvstændigt må finde ud af hvad det kan bidrage med og hvordan. Tyngdepunktet *illustration* har for lille vægt til at kunne vurderes realistisk.

Endeligt tyder det - med stor usikkerhed - på at respondenterne generelt er åbne overfor metadimensionen og at dette gælder alle tyngdepunkterne i denne. Grundlaget for at udtale sig om det er dog ret spinkelt.

MAT-ID	I	MED	OM	a	b	c	d	e	f	i	j	k	l	r	s	t
Alle	0,64	0,47	0,52	0,75	0,59	0,48	0,68	0,64	0,76	0,66	0,71	0,49	0,30	0,59	0,41	0,61
Vægt	195	131	28	52	53	43	27	20	12	9	30	35	57	12	12	4

9.7) Gennemsnit af alle respondenters tyngde for hvert enkelt tyngdepunkt samt dimensionerne overordnet set.

Overordnet set synes den dominerende fagidentitet blandt gymnasielærerne altså at være en blandet fagidentitet hvor *teori*-dimensionen vejer tungest, men dog ikke *meget* tungere end *anvendelses*- og *meta*-dimensionen, som også en del tyngde og i øvrigt er omtrent lige tunge.

9.1.3 Diskussion: *Hvilke fagidentiteter dominerer i dag gymnasiematematikfaget?*

Afhandlingens analyser og diskussioner af delkonklusioner på de to delspørgsmål i de to foregående afsnit, peger i retning af en konklusion der siger at gymnasiefaget i dag som helhed domineres af fagidentiteter med betydelig tyngde i alle tre dimensioner, men tungest i teoridimensionen. At tyngden i teoridimensionen er størst i tyngdepunktet *færdighedstræning*, efterfulgt af *begrebskendskab*, *teoriforståelse* og *problemløsning*, mens *ræsonneret retfærdiggørelse* synes at glide i baggrunden sammenlignet med tidligere tider. Samt at konventionskendskab udgør et potentielt konfliktfelt.

At tyngden i anvendelsesdimensionen især skal findes i tyngdepunkterne *motivation* og *illustration*. At der i mindre grad lægges vægt i *service*-tyngdepunktet mens *værktøjs*-tyngdepunktet har væsentligt mindre tyngde end de øvrige. Hvor stor tyngde anvendelsesdimensionen skal tillægges og især hvordan denne i så fald skal fordeles mellem tyngdepunkterne, synes dog også at være et potentielt konfliktfelt. Det samme kan siges om mængden og fordelingen af tyngde i meta-dimensionen.

At der peges i retning af en sådan konklusion skyldes i hovedsagen at analyserne af de aktuelle fagidentiteter på såvel system-, lærebogs- som underviserdomænerne stort set samstemmende peger i denne retning. Og så kan konklusionen jo virke lige til. Der er imidlertid gode grunde til at diskutere konklusionen lidt mere i dybden.

Hvis man ser på systemdomænet, så optræder ovennævnte tyngdepunkter ikke i et passende miks jævnt igennem de forskellige styrende dokumenter. De optræder tværtimod opdelt. Særligt den såkaldte *læreplan*, der som bilag til gymnasiebekendtgørelsen er det mest formelle dokument, er skarpt opdelt så forskellige afsnit udtrykker forskellige fagidentiteter. Dette blev i afsnit 5.2 kaldt for en *uklar* fagidentitet. Og den har den egenskab, at mange undervisere med meget forskellige fagidentiteter kan se sig i læreplanen, ved at følge det afsnit der passer dem bedst. Identiteten for den skriftlige eksamen er imidlertid meget entydig på *færdighedstræning* og *motivation*.

Ser man på de to analyserede aktuelle lærebøger, så er forskellen at finde i detaljen - men ikke desto mindre tydelig. Først og fremmest er der en klar forskel på i hvilken grad anvendelse- og meta-aspekter indgår som en selvstændig pointe. Og ser man indenfor *meta*-dimensionen er Systimes lærebøger meget snævrere fokuseret på *intern refleksion* - typisk med fokus på matematikkens historie - mens Gyldendal spreder sig mere ud. På lærebogs-domænet eksisterer der altså oplagt en uenighed mellem i hvor høj grad faget skal have tyngde udenfor teoridimensionen.

På underviserdomænet ligner udspændingen af fagidentiteter den vi ser i de to lærebogssystemer. Der er bred opbakning til at teoridimensionen skal fylde mest, med størst fokus på *færdighedstræning*. Samtidig er der stor spredning i mængden af tyngde der lægges i *anvendelses*- og især i *meta*-dimensionen, uden at der dog synes at eksistere en gruppe af undervisere der fuldstændigt afviser disse to dimensioner.

Situationen synes altså at være, at en *uklar* fagidentitet på systemniveauet gør det muligt for såvel lærebøger som undervisere med varierende fagidentiteter at sameksistere med det samme system. Samtidig står det dog klart at den del af systemet der er bagudstyrende - det vil sige den skriftlige eksamen - har en meget *klar* fagidentitet, som dog heller ikke ser ud til at konflikte med større grupper af undervisere. Man kan sige at system-domænets *uklare* fagidentitet udspænder et mulighedsrum for fagidentiteter på lærebogs- og underviserdomænerne. Ligger en lærebog eller en underviser mere eller mindre uden for dette mulighedsrum, opstår der potentielt en konflikt.

Skal man søge tilbage til den personlige undring afhandlingen indledtes med, om hvorfor en mere radikal anvendelsesdagsorden, som f.eks. den man så i Tomas Højgaard Jensens afhandling (Jensen 2007), så synes fagidentitetsbegrebet at kunne begrunde dette. Selvom tyngden i *anvendelses*-dimensionen er betragtelig, så er den gennemgående mindre i *service*-tyngdepunktet og *værktøjs*-tyngdepunktet er det med lavest tyngde af alle overhovedet. Den type af problemstillinger som en sådan radikal anvendelsesdagsorden indeholder, afvises generelt af undervisernes. Og en del af dem som tilslutter sig problemstillingernes indhold, er samtidig stærkt kritiske overfor deres form. Denne stillingtagen synes at kunne forklares med et begreb som *fagidentitet*. Det er altså ikke kun et spørgsmål om vilje eller fagidentitet hos systemet, men om at underviserne ikke oplever denne problemtype som noget de forbinder med deres eget fag.

9.1.4 Konklusion:

Gymnasiematematikfaget domineres af en *teori*-orienteret fagidentitet, med sin væsentligste fokus på *færdighedstræning* og sekunderet af *begrebskendskab*. Dette billede har kunnet ses på systemdomænet i den 80-årige periode afhandlingen har analyseret. I samme periode er *ræsonneret retfærdiggørelse* blevet stadig mindre dominerende og har i dag kun lille tyngde. Dette billede bekræftes af analysen af underviser-domænet. *Teoriforståelse* har også stor opslutning begge steder. Ser man på lærebogsdomænet er billedet også overordnet set det samme på den aktuelle bane, men med en betydeligt anderledes fagidentitet historisk, hvor *teoriforståelse* og *ræsonneret retfærdiggørelse* har betydet mere.

Både system- og lærebogsdomænerne har i den analyserede periode gradvist øget tyngden i både anvendelses- og metadimensionen. Blandt underviserne er der en klar - men varierende - tilslutning til at faget skal have tyngde i disse to dimensioner. For anvendelses-dimensionen er *motivation*-tyngdepunktet klart dominerende. Det vil sige at anvendelsen skal ske på matematikkens betingelser, med respekt for at anvendelsen skal virke meningsfuld. Der er dog også en vis opslutning til et *service*-tyngdepunkt hvor matematik i højere grad ”servicerer” med løsning af matematikholdige problemstillinger defineret af andre fags betingelser. Og der synes at være en lille tilslutning til *værktøj*-tyngdepunktet, hvor det er en selvstændig pointe i matematikfaget at bringe dette med ind i problemstillinger, hvor det matematikholdige indhold på forhånd er meget uklart.

Findings

Udover ovenstående formelle konklusion er det værd at fremhæve en række ”findings”, som har været mere eller mindre tilsigtede fra starten. Blandt disse er der visse overlap med den formelle konklusion, men de er fundet værd at fremhæve som særlige resultater fra afhandlingens arbejde:

- **Begrebet ”fagidentitet” er konstrueret** med såvel en generel betydning, som med et detaljeret begrebsapparat tilknyttet der gør det muligt at tale om forskelle mellem ”fagidentiteter”. Det er empirisk sandsynliggjort at dette begreb faktisk har en meningsfuld betydning for analyser af organisering af matematikundervisning. Der er ikke tale om et låst begreb, så det vil give fin mening for andre forskere, udviklere, studerende og praktikere at tage fagidentitets-begrebet op igen og videreudvikle dette. Enten ved at justere på denne afhandlings begrebsapparat eller ved at lave et nyt begrebsapparat inden for definitionen af en fagidentitet. Så for denne afhandling er *begrebet* ”fagidentitet” og det tilhørende begrebsapparat som et analyseværktøj et *teoretisk resultat.*
- **Der synes at være stor enighed om at *anvendelse* har en plads**. I modstrid med hvad der faktisk var min personlige formodning ved indgangen til arbejdet med denne afhandling, så synes det at være en meget sikker konklusion at den gruppe af matematiklærere som fuldstændig afviser fagets *anvendelses*-dimension er meget lille. Så lille at den ikke har kunnet fanges ind af denne afhandling. En principiel modstand mod anvendelse er altså ikke en forhindring for forandringer i gymnasiematematikfaget i retning mod større vægt på anvendelse. Uenighederne handler altså ikke om matematikanvendelse hører hjemme i matematikfaget, men i stedet om *hvordan* og *hvor meget* anvendelse af matematik skal indgå.
- **Anvendelsesdimensionen domineres i høj grad af en *motivations*-dagsorden.** Det vil sige at systemet, lærebøger og undervisere mener at matematikfaget selv skal styre indholdet i de anvendelser af matematik som faget kommer i kontakt med. Omvendt må konteksterne gerne sætte nogle rammer for anvendelsen. De matematikspørgsmål af anvendt karakter som rejses i undervisningen, må meget gerne respektere hvad der er meningsfuldt i konteksten. Der er dog ikke nogen udpræget modstand mod situationer hvor dette ikke sker. Til gengæld er der registreret et vidst forbehold over for *service*-dagsordenen hvor matematikfaget skal arbejde med spørgsmål af tydelig matematisk art, men ”rekvireret” af konteksten fordi deres løsninger er nødvendige og meningsfulde. Og der er registreret et endnu tydeligere forbehold overfor en *værktøjs*-dagsorden hvor matematik bringes direkte i spil som et muligt værktøj ved løsning af problemstillinger i konteksten, som ikke ved første øjekast fremstår med et klart matematisk indhold.
- **Der er en sammenhæng mellem tilslutning til *anvendelses*- og tilslutning til *meta-dimensionen***. De undervisere der tillægger anvendelses-dimensionen stor tyngde tillægger også meta-dimensionen stor tyngde. Det omvendte er imidlertid ikke tilfældet.
- **På system- og lærebogs domænerne har anvendelses- og meta-dagordener øget deres betydning de sidste 50 år**. Faktisk synes disse aspekter af faget at være vokset fra i praksis nærmest ikke at have haft tyngde, til i dag at være en signifikant pointe ved faget. Denne

udvikling har især været tydelig på systemdomænet, mens der på lærebogsdomænet snarere har været tale om en udvidelse af hvor meget det har indgået.

- **Underviserne er kritiske overfor matematikfaget i reform 2005.** Et flertal af lærerne i undersøgelsen kalder fagets udvikling under 2005-reformen for uønsket i et vist omfang. Dette kan forklares med fagidentitet. Respondenter der deklarerer sig med en fagidentitet der vægter anvendelse lavt, er klart mest tilbøjelige til at kalde reformen uønsket. Derudover er forklaringen også oplevelsen af et fald i det faglige niveau. Stort set alle der opfatter udviklingen som uønsket angiver at det faglige niveau er faldet. Men samtidig synes introduktionen af CAS-værktøjer ikke at være en forklaring. Blandt dem som finder udviklingen uønsket er der stor spredning i hvor vidt man opfatter CAS-værktøjer som undergravende for faget. Til gengæld er der stor enighed blandt respondenter, der synes udviklingen er ønskelig om, at CAS-værktøjer ikke er undergravende for faget. Så kritikken synes at handle om fagidentitet og faldende niveau, mens støtten til 2005-reformens forandringer af faget synes begrundet i fagidentitet og muligvis tilslutning til brug af nye digitale værktøjer.

9.2 Forbehold - besvarelsens styrke og rækkevidde

Et studie som det der er afrapporteret i denne afhandling kan naturligvis ikke afrundes med en konklusion, uden at man må tage visse forbehold for konklusionen og vurdere dennes styrke og rækkevidde. Med styrke menes om konklusionerne er valide og entydige for det der faktisk er studeret, mens der med rækkevidde tænkes på om konklusionen har en mere generel gyldighed end blot for de direkte analyserede data.

Til en sådan diskussion og vurdering hører mindst to grundlæggende overvejelser. For det første en kritisk refleksion over usikkerheder og begrænsninger i den metode der er anvendt. Her tænkes naturligvis på mere principielle metodologiske betragtninger og ikke på evaluering af hver enkelt bide i den konkrete metode. For det andet en vurdering af hvilken betydning foretagne til- og fravalg kan have haft.

Disse to diskussioner bliver taget i de følgende to afsnit. Det er allerede her værd at bemærke, at en sådan vurdering naturligvis vil savne stringente og uafviselige argumenter for konklusionens holdbarhed. Sådanne argumenter kan kun meget sjældent gives. I stedet har det karakter af at være en konstatering af hvor usikkerhederne ligger, fulgt op af en almen betragtning om hvorfor problemet nok ikke eksisterer i større omfang i denne afhandling.

9.2.1 Metodens problemer og konsekvenserne heraf

Det væsentligste forbehold der kan og skal tages overfor denne afhandlings resultater handler om hvordan kvalitative data oversættes til kvantitative data. Grundlæggende set er fagidentiteter jo af kvalitativ art. De beskriver et indhold og ikke en mængde. Arbejdet foregår således ved at nuancerede kvalitative data i første omgang standardiseres ved at blive rubriceret i kasser med bestemte begrebsetiketter på. Dernæst kvantificeres disse standardiserede kvalitative data ved at det optælles hvor mange eksemplarer der er indeholdt i en kasse og tillige i nogle tilfælde ved at de enkelte eksemplarer optælles med forskellig vægt.

Den første usikkerhedskilde er således når kvalitative objekter puttes i kasser - det vil sige knyttes til en kategori i et begrebsapparat. Her træffer man som den der analyserer dokumenter og besvarelser en række konkrete vurderinger. For denne afhandlings vedkommende er der formentlige tale om over tusinde enkeltstående vurderinger. På den ene side skaber det formentlig stor konsistens at samtlige vurderinger er truffet af den samme person, i modsætning til hvis forskellige objekter var analyseret af forskellige personer. På den anden side så åbner det op for, at det samlede resultat af analysen kunne være faldet ganske anderledes ud, hvis den var foretaget af en anden person.

Et sådan andet resultat kan både skyldes uoverensstemmelser om hvordan en konkret kategori faktisk skal forstås. Og det kan skyldes at to personer der egentlig er enige om kategoriernes betydning, vurderer et konkret objekt forskelligt. Denne form for analyser er *ikke* af objektiv og indiskutabel natur. Når styrken i afhandlingens konklusioner skal vurderes, bygger det således på tilliden til at den person der har foretaget de konkrete vurderinger, har gjort dette fornuftigt. Bilagsmateriale gør et samtidig muligt at kigge vurderingen efter. Mængden af vurderinger kan være et argument for, at selvom konkrete vurderinger falder forskelligt ud, så vil det ikke påvirke det overordnede billede. Man kan med andre ord ignorere de konkrete uoverensstemmelser, fordi de er dråber i et hav.

Den anden kilde til usikkerhed er når de kategoriserede objekter optælles og dataene dermed bliver kvantitative. Her opstår en uundgåelig stillingtagen til hvordan objekterne skal tælles. Selv hvis man blot tæller hvert objekt som ét, er dette udtryk for en beslutning om hvor meget det enkelte objekt vejer i sammenfatningen. Her er der selv sagt ingen objektive forhold at gribe til. Der må foretages en konkret vurdering og det eneste man kan gøre er at lægge denne vurdering ærligt frem. Den er et subjektivt skøn og andre personer kunne meget vel have skønnet anderledes. Man kan dog sige at det skøn der laves kun er brugbart, hvis sagkundskaben inden for feltet i almindelighed vil mene at der er fornuft bag. Og inden for dette kvalitetskriterium for en optælling af kategoriserede kvalitative data, vil variationerne i det overordnede resultater nok være ret begrænset. Det vil med andre ord kræve en *ufornuftig* optælling at nå til et markant anderledes resultat.

De to principielle anker som er beskrevet ovenfor er naturligvis en udfordring af konklusionens præcision. Afhandlingens forsvar overfor denne udfordring er omfanget af analyseret data som er ganske omfattende og derfor har en vis modstandsdygtighed overfor problemer opstået ved subjektive skøn.

Udover ovenstående som vedrører den helt generelle metodologi, eksisterer der også en mere specifik usikkerhed i forhold til spørgeskemaundersøgelsen. Her antages det almindeligvis at en respondents svar kan fortolkes sådan som det var tænkt da det blev stillet som valgmulighed. Men respondenter kan have mange forskellige forståelser af både spørgsmål og svarmulighed og vil måske som sådan føle at de udlægninger der laves af deres svar er misvisende. Et svar på en sådan kritik vil være, at fortolkningen netop bygger på deres spontane svar, frem for deres reflekterede. Og når respondenten efterrationaliserer kommer der netop en sådan refleksion ind, som ikke var tiltænkt.

En anden problemstilling er konklusionens rækkevidde. I første omgang om resultaterne kan generaliseres fra de konkrete respondenter der har deltaget til at gælde hele det undersøgte felt; gymnasiematematikfaget i det almene gymnasium. Her kan det første problem være at populationens har bias. Det er f.eks. tænkeligt at der kan være en vis sammenhæng mellem en undervisers fagidentitet og sammes tilbøjelighed til at bruge i omegnen af en time på at besvare et net-baseret spørgeskema. Det er desværre ikke muligt at vurdere en sådan bias her - det må blive ved konstateringen af at der kan være et problem med konklusionens rækkevidde.

I anden omgang kan det diskuteres om resultaterne kan generaliseres udover det analyserede felt - altså her det almene gymnasium. Her kan det siges, at det opstillede begrebsapparat formentlig vil kunne bruges i mange andre matematik-sammenhænge. Det samme gælder den anvendte metode. Der er imidlertid ikke noget direkte argument for at resultaterne af analysen vil kunne siges at gælde bredere. Her er der alligevel en principiel forskel på de forskellige uddannelser.

9.2.2 Betydning af prioriteringer

Udover at valget af metode medfører en række metodologiske forbehold sådan som det er diskuteret i forrige afsnit, så er der også foretaget en række valg og prioriteringer undervejs af hvilket og hvor meget materiale der har været inddraget. Disse valg er naturligvis også nødvendige at forholde sig til. Et par af fravalgene er diskuteret herunder:

Analysen af system-domænet har som sagt været fokuseret på de opgaver der stilles ved *skriftlig eksamen*. Dette har været gjort ud fra dels en principiel forventning om at den skriftlige eksamen virkelig er meget stærkere dagsordensætter end den mundtlige, dels fra en pragmatisk forventning om at materiale om mundtlig eksamen - særligt i de historiske perioder - ville have været meget vanskeligt at fremskaffe. Konsekvensen af dette valg er formentlig at system-domænet forskydes væk fra *ræsonneret retfærdiggørelse* og over mod *færdighedstræning*. Valget kan imidlertid begrundes med at den skriftlige eksamens form med meget typiske opgaver betyder at den er nem at træne til gennem regning af tidligere eksamenssæt og således har en helt anderledes betydning i den daglige undervisning end en mundtlig eksamen. Fravalget kan altså i en vis forstand hævdes at gøre konklusionen skarpere, men der ligger altså et tab af viden i konklusionen.

I den historiske analyse af lærebogsdomænet blev lærebogssystemer fra perioden 1988-2005 valgt fra. Dette skete først og fremmest af tidsmæssige hensyn, men var også begrundet i en forventning om at perioden manglede et lærebogssystem der var ”dominerende” på samme måde som f.eks. Kristensen og Rindung var det i perioden før. Konsekvensen af dette fravalg er naturligvis at den historiske analyse ikke bliver komplet. Dette er dog næppe så problematisk for konklusionerne om den aktuelle fagidentitet. Men det betyder dog at forsøget på at trække linjer fra lærebogssystemer i 1988-reformperioden dels bagud til perioden før, dels fremad til den nuværende periode, får mere karakter af en formodning, end det får karakter af en sikker konklusion.

Endeligt er der sket et fravalg af lærebogssystemer fra det aktuelle system. I første omgang var det afhandlingens ambition at analysere de fem lærebogssystemer som eksisterede på det tidspunkt arbejdet blev sat i gang. Udover de to systemer fra Gyldendal og Systime som rent faktisk blev udvalgt, drejede det sig om systemet ”Matema10k” fra det mindre forlag Frydenlund og systemerne ”TRIP’s matematiske bøger” og ”Vejen til matematik” fra mikroforlagene TRIP og HAX.

At der måtte ske et fravalg handlede om hvor omfattende en analyse der var tid til at foretage. At tilvalget blev af netop de to systemer, var begrundet i at spørgeskemaundersøgelsen viste at disse to systemer var mest kendte og mest benyttede af de fem. Dette fravalg af i første omgang tre lærebogssystemer har naturligvis betydet at mangfoldigheden af fagidentiteter inden for lærebøger er blevet visket ud. Fokus i analysen er altså endt at have fokus på en formentlig helt central konflikt, men en del nuancer er forsvundet.

I tillæg til dette valg kommer, at der siden påbegyndelsen af afhandlingen er dukket adskillige nye lærebogssystemer op, som alle ser ud til at have en meget klar fagidentitet. Det drejer sig først og fremmest om systemet ”Lærebog i matematik” af Morten Brydensholt og Grete Ridder Ebbesen, der ud fra en overfladisk vurdering har et meget stærkere fokus på *ræsonneret retfærdiggørelse*, end de analyserede lærebogssystemer.

Derudover er der kommet systemet ”Kernestof” af Per Gregersen, Majken Sabina Skov og Peter Limkilde, som ud fra en overfladisk betragtning er bygget op med stor tyngde omkring *problemløsning*. Og der er kommet systemet ”Hvad er matematik” af Bjørn Grøn, Bjørn Felsager, Bodil Bruun og Olav Lyndrup. Dette system er skrevet af den tidligere og nuværende fagkonsulent og kan altså i en vis forstand ligesom Kristensen og Rindung tolkes som et budskab om hvordan den fra systemets side tænkte fagidentitet virkelig er tænkt. Systemet lægger sig ved en overfladisk betragtning tæt op ad den formelle beskrivelse af fagidentiteten i læreplanen og har således gennemgående stor tyngde i *anvendelses*- og *meta*-dimensionerne.

Der er kommet flere lærebogssystemer til, herunder en hel del der kun eksisterer på e- og i-bogs form. Der er således en mangfoldighed af nuancer her, som analysen ikke har dækket.

9.2.3 Vurdering: Hvor sikker er konklusionen

Hvis man skal give en overordnet vurdering af konklusionens sikkerhed, så betyder de metodologiske problemstillinger at konklusionen formentlig har en høj grad af sikkerhed i sine vurderinger på det overordnede niveau. Konklusionerne om hvilke fagidentiteter der dominerer gymnasieskolen i dag helt overordnet er altså retvisende. Men på mikroniveau vil analysen være svagere. Man kan f.eks. næppe forvente at én enkelt udvalgt respondent vil have præcis den fagidentitet, som aggregeringen af vedkommendes svar peger på.

Endvidere betyder fravalgene indenfor datamateriale at der er nuancer og aspekter som ikke opfanges af analysen. Men valgene er truffet så konklusionen overordnet set må forventes at være retvisende, selvom den altså kan anfægtes ud fra enkeltstående betragtninger. Valgene kan i øvrigt kontrolleres og vurderes direkte i de vedlagte bilag.

9.3 Perspektiv - fagidentitet og forandringsrum

Et arbejde som det der er afrapporteret i denne afhandling har størst almen værdi, hvis det tegner nogle perspektiver op for hvordan det kan influere på fagets praksis. I dette afsluttende afsnit vil det blive forsøgt at trække sådan nogle linjer fra begrebet *fagidentitet* til fagets udvikling. En væsentlig pointe i denne afhandling har været at fagidentiteter kan stå i vejen for forandring og udvikling af matematikfaget. I forlængelse af denne pointe er det altså afgørende at primært undervisere, men også de menneskelige aktører bag system og lærebøger, jævnligt udfordres på deres fagidentitet.

Da fagidentiteter formes i menneskers bevidsthed, kan de forandres. Det er klart at denne opgave kan være både nem og svær. Nogle mennesker er meget åbne over for at lade deres vaneforestillinger udfordre af nyt, andre er meget lukkede overfor dette. Og uanset hvad er det en væsentlig pointe at slå fast, at ikke al forandring er god forandring og at fagets aktører således godt kan have gode grunde til at agere friktion overfor forandringsprocesser. Omvendt skulle det være underligt om det mest optimale gymnasiematematikfag til alle tider og steder var realiseret.

Udvikling af en fagidentitet kan naturligvis godt ske på et isoleret individuelt plan hjemme i lænestolen. Men det mest tænkelige er at udvikling og forandring sker ved intellektuel interaktion med andre mennesker. Her er det afgørende at diskutere for det første matematikfagets *fagkultur* og for det andet dets *infrastruktur*. Det er kombinationen af disse to elementer, som kan skabe rum for udvikling og forandring. Som præsenteret i afsnit 4.5 vil diskussionen være spændt ud af to dikotomier. For det første ”lokalt - overlokalt”. Det vil sige kultur og infrastruktur på skoleniveau overfor niveauer der involverer flere skoler (almindeligvis det nationale niveau). For det andet ”institutionaliseret - individualiseret”. Det vil sige om opgaven med at udvikle faget sker i tilrettelagte rammer fra skole, foreninger, undervisningsministerium, mv. eller om den sker på fagets aktørers eget private initiativ, uden overordnet organisering. Denne analyseramme er repræsenteret i tabel 9.8 som et 2x2-skema. I hvert skemafelt er opstillet nogle eksempler på ”knudepunkter” for dialog omkring fagets indhold og udvikling.

Fagmiljøet	**Institutionaliseret**	**Individualiseret**
Lokalt	Fagmøder Seminarer/studiekredse/workshops	Uformelle snakke
Overlokalt (nationalt/regionalt)	Kurser Udviklingsmaterialer Bøger og tidsskrifter	SkoleKom Hjemmesider Tidsskrifter

Tabel 9.8:2x2-begrebsmatrix for udspænding af fagmiljøet, med væsentlige knudepunkter nævnt

Som afsæt for de anbefalinger der vil afrunde rapporten, præsenteres i det følgende afsnit en række empiriske resultater fra spørgeskemaundersøgelsen. Disse underlægges ikke en behandling hvor der er tale om egentlig forskning, men derimod netop en fremstilling der gør dem brugbare for en perspektiverende diskussion.

9.3.1 Fagkultur og infrastruktur - lidt empiri

Fremstillingen af den indsamlede empiri om den lokale og overlokale fagkultur og infrastruktur vil blive gennemgået i det følgende opdelt efter de fire felter i 2x2-skemaet ovenfor:

Lokalt institutionaliseret

Den væsentligste lokale institution for dialog mellem matematikundervisere er formentlig den lokale *faggruppe*. I tabel 9.9 ses respondenternes svar på hvor ofte faggruppen holder "regulære" møder for matematiklærerne på skolen, fraregnet tematiserede møder som studiekredse, seminarer, mv.

Hvor ofte afholdes der selvstændige møder for din skoles matematiklærere (ikke studiekredse, seminarer og lign.)?	#	%
0	3	2%
1	20	15%
2-4	95	70%
ca. 5	14	10%
ca. 10	3	2%
I alt	135	100%

9.9) Respondenter angivelse af antal møder for matematikfaggruppen om året

Der angives endvidere mange forskellige gennemsnitlige længder af faggruppemøder, men gennemsnittet af dette er ca. 80 minutter. Så et faggruppemøde varer formentlig hvad der på den enkelte skole svarer til "et undervisningsmodul" - dvs. typisk 60-90 minutter. På et spørgsmål om mødekulturen tilslutter over 70% sig synspunktet at den er "løs, uformel, afslappet" samt at "de fleste deltager ind i mellem i diskussionerne". De mere negative svarmuligheder som at møderne domineres af en fast kerne, har få deltagere, er stressede og ustrukturerede får kun meget lille tilslutning (<10%).

I tabel 9.10 ses hvordan respondenterne har tilvalgt en række på forhånd definerede beskrivelser af hvad det typiske indhold på et faggruppemøde er. Blandt de som angiver "Andet" svarer omkring hver tredje at digitale-værkøjer fylder som indhold på møderne, ligesom efteruddannelse, valg af lærebøger og time/fagfordeling nævnes af enkelte. Men kigger man ellers på de fire øverste punkter i tabel 9.10, som er dem mere end 50% sætter kryds ved, så har de karakter af at være orienteret mod driften af det eksisterende fag samt almindelig faglig hygge. Ser man på de næste fire, som har tilslutning fra mellem en tredjedel og halvdelen af respondenterne, så rummer de i højere grad et udviklingsaspekt.

Sæt kryds ved det af nedenstående indhold du mener er forholdsvist normalt for jeres matematiklærermøder	#	%
Praktiske beskeder fra en overordnet matematik-ansvarlig (f.eks. fagformanden)	99	75%
Særlige pædagogiske udfordringer relateret til matematik	89	67%
Hyggeligt samvær med kollegaer	86	65%
Udveksling af almindelig matematikfaglighed	71	54%
Sparring over ideer til undervisning, opgaveformuleringer, mv.	63	48%
Udvikling af almindelig matematikfaglighed	61	46%
Udveksling af ideer til fagligt samspil med andre fag	47	36%
Udvikling af ideer til fagligt samspil med andre fag	43	33%
Generelle pædagogiske udfordringer	40	30%
Praktiske beskeder fra ledelsen	26	20%
Ligegyldig snak og irrelevante ting	10	8%
Kommentering på hinandens undervisning	2	2%
Andet (angiv gerne hvad i feltet herunder)	30	23%
Ingen svar	0	0%
N	132	100%

9.10) Respondenters angivelse af forhåndsdefinerede beskrivelser af indhold på faggruppemøder.

I tabel 9. 11 ses i hvor høj grad respondenterne mener at der på deres skoler afholdes tematiserede møder af typen ”studiekreds”, ”seminar”, mv. I tabel 9.12 hvad indholdet på disse typisk har været:

Hvor ofte afholder i studiekredse, seminarer eller anden tematiseret begivenhed for matematiklærerne på din skole?	#	%
Aldrig	22	16%
Med års mellemrum	37	27%
1-2 gange om året	75	56%
3-4 gange om året	1	1%
I alt	135	100%

9.11) Respondenters angivelse af antal årlige studiekredse, seminarer, mv. med tema.

Hvad har de seneste år typisk været det planlagte indhold på studiekredse, seminarer, mv.? (sæt gerne flere krydser)	#	%
Et specifikt matematik-emne	63	56%
Undervisningsmetoder	29	26%
Diskussion om fagets tilrettelæggelse på skolen i forhold til de centrale regler	27	24%
Et specifikt eksempel på matematikkens anvendelse	26	23%
Undervisningsforløb mellem matematik og andre fag	23	20%
Undervisningsforløb i matematik	22	19%
Håndtering af konkrete uddannelseselementer (f.eks. studieretning, SRP, SRP, AT, mv.)	13	12%
Evalueringsformer og -instrumenter	3	3%
Et specifikt udsnit af matematikkens historie, filosofi, og lign	1	1%
Andet (uddyb gerne herunder)	44	39%
Ingen svar	0	0%
N	113	100%

9.12) Respondenters angivelse af forhåndsdefinerede beskrivelser af indhold på studiekredse, seminarer, mv.

Det ses at lige under halvdelen af respondenterne oplever at der afholdes et sådan arrangement sjældnere end én gang om året, mens et lille flertal oplever det 1-2 gange årligt. Det er dog kun 16% der aldrig oplever at en sådan holdes, så en vis kultur for tematiseret diskussion af matematikundervisningen findes der.

Indholdet på disse tematiserede møder synes i høj grad at handler om det matematikfaglige indhold, mens undervisningsmetoder fylder mindre. Dertil ses at der en del steder bruges en del kræfter på at diskutere hvordan man placerer sig lokalt i forhold til centrale regler. Dette ses også ved at af de 44 der svarer "Andet" har 39 angivet et indhold relateret til brug af digitale værktøjer.

Langt de fleste respondenter angiver endvidere at oplæg på seminarer, studiekredse, mv. holdes af en matematiklærer fra skolen (67%) eller fra en anden skole (54%). Der forekommer også input udefra fra forskere i matematik (12%), matematikuddannelse (5%), matematikkens historie, filosofi, mv. (4%), private virksomheder (11%) og derudover i meget lille grad lærere fra andre fag, mv.

Lokalt individualiseret

Ser man på den lokale *individualiserede* fagkultur, så er den noget sværere at undersøge, da den netop er individuel. Respondenten er dog blevet bedt om at tilkendegive hvilke af en række prædefinerede beskrivelser af den lokale fagkultur de kunne genkende. Besvarelsen af dette er sammenfattet i tabel 9.13.

Sæt kryds ved de af nedenstående elementer, som du synes kendetegner din skoles uformelle fagkultur	#	%
Det er acceptabelt at opsøge en kollega for at spørge om matematikfaglige ting	133	99%
På lærerværelset (og lign. steder) diskuterer matematiklærerne ofte faglige ting med hinanden.	122	90%
Det er acceptabelt at opsøge en kollega for at diskutere sin undervisning	111	82%
De øvrige matematiklærere er interesseret i det du laver i din undervisning	84	62%
På lærerværelset (og lign. steder) diskuterer matematiklærerne ofte faglige ting med de øvrige lærere	68	50%
Der finder dialog sted med matematikkollegaer fra andre skoler	29	21%
Der er (bevidst eller ubevidst) opstået en mindre gruppe af særligt engagerede matematiklærere, som lokalt er drivkraft i udviklingen af fagets indhold, undervisningsformer, mv.	25	19%
Ingen svar	0	0%
N	135	100%

9.13) Respondenters angivelse af forhåndsdefinerede beskrivelser af den uformelle fagkultur på skolen

Det ses at de fleste oplever at der på skolen er en dialogkultur blandt matematikunderviserne på deres skole, hvor det både er acceptabelt og almindeligt at matematikundervisere diskuterer deres fag. Diskussionerne med de øvrige faglærere synes at være mindre udbredt, men dog ikke sjælden. Til gengæld oplever kun få respondenter at der finder en dialog sted med kollegaer fra andre skoler. En mindre gruppe (19%) kan i øvrigt nikke genekendende til, at arbejdet med at udvikle faget er overtaget af en mindre gruppe matematiklærere på skolen.

I tabel 9.14 er endvidere sammenfattet respondenternes svar på hvem der foretrækker at sparre med, når de skal diskutere indhold og form på deres undervisning. Her understreges indtrykket fra forrige tabel af, at der finder en hel del kollegial dialog sted. Til gengæld er det slående at respondenterne tilsyneladende kun i meget lille grad bruger de formelle kanaler i form af f.eks. fagformanden eller ledelsen til en sådan opgave. Det indikerer altså at fagkulturen på skolerne i meget høj grad lever som individuelle praksisser af mere eller mindre tilfældig art.

Hvis du har behov for at diskutere din undervisnings indhold eller form, hvem foretrækker du så at sparre med? (sæt gerne flere krydser)	#	%
En eller flere bestemte matematikkollegaer på skolen	99	73%
De matematik-kollegaer du tilfældigt møder på lærerværelset (eller lign. sted)	72	53%
Personer uden matematikuddannelse (kollegaer, bekendte, mv.)	26	19%
Andre bekendte med matematikuddannelse	23	17%
Matematik-kollegaer på andre skoler	22	16%
De fremmødte på matematiklærermødet	21	16%
Andre (uddyb gerne hvem)	12	9%
Skolens overordnede matematikansvarlige (f.eks. fagformanden)	11	8%
Skolens ledelse	4	3%
Ingen svar	2	1%
N	135	100%

9.14) Respondenters angivelse af forhåndsdefinerede beskrivelser af den uformelle fagkultur på skolen

Overlokalt institutionaliseret

Hæver man sig op fra det lokale niveau findes der et regionalt niveau, et nationalt niveau og et internationalt niveau. Her vil fokus i hovedsagen være på det nationale niveau. Dels fordi at det regionale miljø kan opfattes som en praktisk måde at organisere det nationale. I praksis oplever kun ca. en fjerdedel af respondenterne at en regional fagkultur findes og kun 9% synes de deltager i en. Dels fordi kun 8 respondenter oplever at have kontant til en international fagkultur, heraf blot 2 der mener de deltager i en sådan. Det er altså det nationale niveau der er interessant.

I tabel 9.15 er opgjort respondenternes svar på hvor ofte de mener at deltage i kortere matematikspecifikke arrangementer udenfor skolen og i tabel 9.16 hvor ofte de mener at deltage i længere matematikspecifikke arrangementer udenfor skolen.

Hvor ofte deltager du i kortere matematikspecifikke arrangementer udenfor skolen (f.eks. foredrag, forelæsninger, mv. over nogle timer)?	#	%
Mere end 4 gange om året	4	3%
3-4 gange om året	3	2%
1-2 gange om året	52	39%
Med års mellemrum	56	41%
Aldrig	20	15%
I alt	135	100%

9.15) Respondenters angivelse af deltagelse i kortere matematikarrangementer udenfor skolen

Hvor ofte deltager du i længere matematikspecifikke arrangementer udenfor skolen (f.eks. efteruddannelse, fagkurser, seminarer, mv. over en eller flere dage)?	#	%
Mere end 4 gange om året	2	1%
3-4 gange om året	8	6%
1-2 gange om året	50	37%
Med års mellemrum	56	41%
Aldrig	19	14%
I akt	135	100%

9.16) Respondenters angivelse af deltagelse i længere matematikarrangementer udenfor skolen

Det ses at lidt under halvdelen af respondenterne angiver at deltage et arrangement af matematikfaglig art mindst én gang om året, mens kun 15% angiver aldrig at gøre det. Arrangementerne her behøver naturligvis ikke at være specielt målrettet gymnasieverdenen, men udtrykker alene om respondenten finder det naturligt at deltage i en matematikfaglig begivenhed af kortere længde.

Det ses endvidere at 44% angiver mindst én gang om året at deltage i et længere matematikspecifikt arrangement uden for skolen, mens kun 14% angiver aldrig at gøre det. Her er der nok for de flestes vedkommende tale om arrangementer målrettet gymnasieverdenen og det viser at det ikke falder flertallet af undervisere fremmed at indgå i overlokale arrangementer med faget på dagsordenen.

Tabel 9.17 viser til gengæld at kun få - ca. 18% - ofte oplever at en kollegas deltagelse i et matematikspecifik arrangement fører til at respondenten bliver inspireret. Omvendt angiver kun 14% at det aldrig sker. Så der er muligvis god grund til at arbejde med evnen til at dele erfaringer og inputs hos folk der deltager og med at arrangementerne tilrettelægges så dette bliver nemmest muligt.

Sker det at en kollega kommer tilbage fra et kortere eller længere matematikspecifikke arrangement udenfor skolen og inspirerer dig med beretningen derfra?	#	%
Det sker ofte	24	18%
Det sker sjældent	92	68%
Det sker aldrig	19	14%
I alt	135	100%

9.17) Respondenters angivelse af inspiration som følge af kollegas deltagelse i matematikarrangement udenfor skolen

Overlokalt individualiseret

På det nationale niveau er den individualiserede del af fagets infrastruktur ganske afhængig af medier hvorigennem kommunikation kan foregå. Det kan enten være envejskommunikation eller dialog mellem dem der følger mediet. Her vil der blive skelnet mellem to typer af medier. På den ene side trykte tidsskrifter der udkommer med nogenlunde fast interval. Her er der primært tale om envejskommunikation, men enkelte af sådanne periodica er åbne for debat og artikler indsendt fra dets læsere. De har således også delvis en dialog-funktion. Det andet er websteder på internettet, som både kan være envejskommunikation hvor indholdet skrives af en redaktion med et eller ganske få medlemmer, men det rummer også mulighed for en kontinuert dialog, som næsten kan få samme karakter som det tilfældige møde på lærerværelset.

I tabel 9.18 ses hvor stor en andel af respondenterne der har tilkendegivet at *kende* en række på 12 forskellige periodica med matematikfagligt indhold. I tabel 9.19 ses hvor stor andel af dem som har angivet at de læser en bestemt titel ofte, som også mener at få inspiration til sin undervisning derfra.

Kendt/ukendt (N = 135)	Kendt
Gymnasieskolen	99%
LMFK-bladet	93%
Illustreret Videnskab	93%
Nature	73%
New Scientist	65%
Aktuel Naturvidenskab	60%
MONA	47%
Matilde	44%
Forum for Matematikkens Didaktik*	35%
NOMAD	19%
Matematik	19%
Educational Studies in Mathematics	19%

*) Ophørt med at udkomme

9.18) Respondenters kendskab til periodica

Læser ofte og finder inspirerende	%	N
NOMAD	100%	1
Aktuel Naturvidenskab	77%	26
LMFK-bladet	76%	94
Matilde	75%	12
MONA	71%	14
Forum for Matematikkens Didaktik*	50%	2
Educational Studies in Mathematics	50%	2
Illustreret Videnskab	42%	12
New Scientist	33%	6
Gymnasieskolen	11%	96
Matematik	0%	3
Nature	0%	5

9.19) Respondenters udbytte af kendt periodica

I tabel 9.20 er tilsvarende sammenfattet hvor stor andel af respondenterne der har angivet at de kender et bestemt websted, mens det i tabel 9.21 er opgjort stor andel af de respondenter som har angivet at de ofte besøger webstedet, som også har angivet at det har indflydelse på deres undervisning, enten fordi de får dækket specifikke behov der eller for at søge mere generel inspiration.

N = 135	Kendt
http://www.emu.dk og http://www.mat.dk	100%
http://www.wikipedia.org	96%
http://www.lmfk.dk	89%
http://www.skolekom.dk	87%
http://www.mat.systime.dk	83%
http://www.georgmohr.dk	82%
http://www.matematiksider.dk	56%
http://www.matlex.dk	48%
http://www.frividen.dk	36%
http://www.mathematics.dk	34%
http://www.mat1.dk	33%
http://www.matematikforsjov.dk	29%
http://www.matematiklinks.dk	27%
http://www.matematikbutikken.dk	23%
http://www.duda.dk	15%
http://www.eh-mat.dk	15%

9.20) Respondenters kendskab til websteder

Besøger ofte… har indflydelse på mig.	%	N
http://www.matematiklinks.dk	100%	5
http://www.duda.dk	100%	2
http://www.matematikbutikken.dk	100%	3
http://www.emu.dk og http://www.mat.dk	95%	122
http://www.mathematics.dk	92%	13
http://www.frividen.dk	89%	18
http://www.mat1.dk	88%	16
http://www.matematiksider.dk	83%	36
http://www.eh-mat.dk	83%	6
http://www.georgmohr.dk	82%	50
http://www.skolekom.dk	78%	68
http://www.matematikforsjov.dk	75%	8
http://www.wikipedia.org	72%	88
http://www.mat.systime.dk	70%	33
http://www.lmfk.dk	67%	51
http://www.matlex.dk	63%	19

9.21) Respondenters udbytte af kendte websteder.

Ser man på listen med tidsskrifter er det mest kendte *Gymnasieskolen*, medlemsblad for Gymnasieskolernes Lærerforening efterfulgt af *LMFK-bladet*, medlemsblad for Matematiklærerforeningen (samt Fysik- og Kemilærerforeningen), som begge er kendt af næsten alle. Hovedparten af respondenterne angiver at de ofte læser disse to blade. 76% af disse angiver at finde inspiration i LMFK-bladet, mens kun 11% svarer det samme om Gymnasieskolen.

Efter disse to fagblade følger tre tidsskrifter som hverken er målrettet gymnasiet eller specielt matematik og som kun få respondenter ofte læser. Derpå følger *Aktuel Naturvidenskab*, som kendes af 60% af respondenterne. Af de 26 der ofte læser det, mener 77% at de kan hente inspiration her.

Det danske naturfags- og matematikdidaktiske tidsskrift MONA er kendt af knapt halvdelen af respondenterne, men kun 14 læser det ofte. Af disse mener 71% at de kan hente inspiration der. De øvrige didaktiske tidsskrifter på listen - NOMAD og Educational Studies in Mathematics kendes af 19% af respondenterne, men læses af stort set ingen.

Ser man på websteder, så kender samtlige respondenter til www.mat.dk som på det tidspunkt spørgeskemaet blev udarbejdet pegede på matematiksiden under undervisningsministeriets portal www.emu.dk (populært kaldet ”EMU’en”). I skrivende stund peger det på Matematiklærerforeningens ”portal”, hvorfra der er link direkte til stx-matematik-siden på ”EMU’en”. Sitet besøges ofte af langt de fleste, som mener at kunne hente relevant inspiration der.

Et andet site er SkoleKom, som er Undervisningsministeriets fælles platform for vidensdeling på skoleområdet. Her er den løbende dialog mellem deltagerne mulig. De fleste respondenter kender det, halvdelen af respondenterne besøger det og af dem bliver tre fjerdedele inspireret. En tilsvarende adgang til løbende dialog er opstået siden spørgeskemaet var i omløb, er gruppen ”Matematiklærer i gymnasiet (stx, hf, htx, hhx, ...)” på det sociale medie Facebook, som i skrivende stund (21. juni 2016) har ca. 1200 tilmeldte brugere. Her foregår diskussioner af mange arter og temmelig ukontrolleret.

Blandt websteder kan også bemærkes Matematiklærerforeningens hjemmeside www.lmfk.dk og hjemmesiden for Georg Mohr konkurrencen, som er rimelig kendte og benyttede af respondenterne og hvor en høj andel af dem der bruger sitet, finder inspiration der. Det gælder også for det brugerredigerede leksikon Wikipedia.

Det var blandt de oprindelige ambitioner for denne afhandling at lave et egentligt kvalitativt studie af, hvilken type indhold og diskussioner der blev faciliteret af ovennævnte tidsskrifter og websteder. Denne ambition har ikke kunnet løftes og derfor kan her alene indgå en mere overordnet vurdering af hvilke af disse der har en udbredelse, som gør at de kan siges at indgå betydeligt i fagets infrastruktur.

9.3.2 Anbefalinger til rammer for udvikling af faget

Når man kigger på de analyserede knudepunkter i den faglige infrastruktur synes der ikke at være mangel på muligheder for kommunikation og udvikling hverken lokalt eller nationalt. Og det gælder både institutionaliseret og individuelt. Derfor må perspektivet for en fagkultur og en faginfrastruktur der kan skabe diskussioner der potentielt kan flytte på fagidentiteterne i højere grad handle om hvordan det der eksisterer bliver bedre, end at finde på nye tiltag. Her følger en række anbefalinger baseret på afhandlingen og dens forfatters personlige erfaringer i øvrigt:

- **Danmark mangler et lag af professionelle udviklere**. Den danske uddannelsesforskning producerer mange resultater som på forskellig vis kan være med til at udfordre fagidentiteten og andre vanemønstre hos danske undervisere. Men overgangen fra forskning til praksis er for stort et skridt. Praktikere kan ikke bruge forskning direkte. Der mangler et lag af *udviklere* mellem de to niveauer. Et lag som på den ene side kender til og forstår forskningsresultater, men som på den anden side kender praksis og kan formulere ting der kan bruges i praktisk undervisning.

- **Danmark mangler et nationalt centrum for matematikundervisning.** Den institutionaliserede indsats på det nationale niveau er kendetegnet ved at være drevet af frivillige ildsjæle i f.eks. Matematiklærerforeningen og mere uformelle netværk og på den anden side af ministerielle embedsmænd - særligt fagkonsulenten - der i hovedsagen skal administrere gældende lovgivning. Hvis Danmark skal have en stærk institutionaliseret ramme for udfoldelse af faglige udvikling på nationalt niveau, kræver det nok et nationalt centrum for denne indsats. F.eks. efter forbillede fra det svenske Nationellt Centrum för Matematikutbildning.

- **Der skal være institutionaliseret forankring på lokalt niveau.** Der synes at være meget stor opbakning til fagets lokale infrastruktur i form af faggrupper, uformelle snakke, mv. Der er altså en struktur at bygge videre på. Og det undervisningsministerielle projekt ”Faggruppeudvikling i Praksis” (FIP) er et godt bud på en ramme for et sådan arbejde. Der mangler dog stadig ankerpersoner til at skabe formidlingen helt ud til den enkelte praktiker. Her kan gymnasiernes voksende gruppe af matematikvejledere være et bud på en mere fast forankring af dette lokale arbejde.

- **Kendskab til og kvalitet af udvalgte tidsskrifter og websteder bør styrkes.** Der synes at eksistere gode tidsskrifter allerede i form af LMFK-bladet, Aktuel Naturvidenskab og MONA, som på hver deres måde kan udbrede kendskabet til matematikfaglighed og matematikundervisning. Men der er brug for at få udbredt kendskabet til disse. Det samme kan siges om velfungerende websteder som Skolekom og EMU’en. For alle disse nationale instanser for formidling og dialog gælder, at kvaliteten naturligvis også kan udvikles.

- **Styrk matematiklærerforeningen.** Den lokale erfaring viser, at matematikfaget i høj grad udvikler sig i et fagligt ”civilsamfund”. Her bør matematiklærerforeningen spille en helt central rolle, som det mest organiserede civilsamfund på nationalt niveau. Det kræver at skolerne understøtter deres matematikfaggruppers deltagelse i foreningens aktiviteter, herunder forpligter sig til at betale for deltagelse i møder, konferencer og kurser.

De anbefalinger som er givet herover og den analyse af fagets fagkultur og infrastruktur der er gået forud, er altså tænkt som relevante inputs til hvordan man kan arbejde med at påvirke fagidentiteterne hos især fagets undervisere. At dette arbejde i hovedsagen handler om at inspirere, diskutere og idéudvikle samt præsentere for konkrete erfaringer, er naturligvis en antagelse der bygger videre på antagelsen om at undervisere som enkeltpersoner har en ”flydende” fagidentitet. Hvis denne antagelse er usand - og det kan denne afhandling ikke afklare om den er - så kan nok så meget infrastruktur naturligvis være ligegyldigt.

Men der er god grund til at antage at mennesker kan flyttes, hvis man tager åbne diskussioner med dem. Denne dialog forudsætter at der udvikles videre på fagets infrastruktur, samt at måden infrastrukturen bruges på udvikles og forbedres. Empirien i dette afsnit viser i hvert fald ganske tydeligt, at en meget stor del af gymnasieskolens matematikundervisere har berøring med og interesse i hvad der foregår af diskussioner over fagets indhold og udvikling.

10 Litteraturliste

Andersen, A.F. & Mogensen, P. (1942). Lærebog i Matematik for gymnasiets matematisk-naturvidenskabelige linie I. Gyldendal, 4.udgave (optryk af 2. udgave)

Andresen, M. (2005). Understanding of 'modelling', *i Proceedings* of the Fifth Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.2042-2049.

Andresen, M. & Lindenskov, L. (2009). New roles for mathematics in multi-disciplinary, upper secondary school projects, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 41, s. 213-222.

Antonsen, U.H. (2009). Studieretningsprojekter i matematik og samfundsfag – Et teoretisk og empirisk studie af tværfaglighed og matematiske kompetencer. Specialerapport fra Århus Universitet. Upubliceret.

Artigue, M. & Blomhøj, M. (2013). Conceptualising inquiry based education in mathematics, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 45, s. 797-810

Balaguer, M. (1998). Platonism and Anti-Platonism in Mathematics. Oxford University Press.

Balaguer, M. (2009). Fictionalism, Theft and the Story of Mathematics, *i* Philosophia Mathematica, vol. 17(2), s. 131-162.

Beswick, K. (2012). Teachers' beliefs about school mathematics and mathematicians' mathematics and their relationship to practice, *i* Educational Studies of Mathematics, vol.79, s. 127-147.

Boaler, J. (2000a). Mathematics from Another World: Traditional Communities and the Alienation of Learners, *i* Journal of Mathematical Behavior, 18(4), s. 379-397.

Boaler, J. et. al. (2000b). The Construction of Identity in Secondary Mathematics Education, *i* Proceedings for Mathematics Education and Society 2 (MES2).

Burgess, J. & Rosen, G. (1997). A Subject with no Object. Oxford University Press.

Bishop, A.J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J. & Laborde, C. (1996). International Handbook of Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands.

Blomhøj, M., Frsidahl, K. & Olsen, F.M. (1985). Treenigheden Bourbaki – generalen, matematikeren og ånden, Tekster fra IMFUFA, vol. 94. Lokaliseret 11/7-2012 på *http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/94.pdf*

Blomhøj, M. (1992). Modellering i den elementære matematikundervisning – et didaktisk problemfelt. Forskningsrapport, Matematisk Institut, Danmarks Lærerhøjskole.

Blomhøj, M., Jensen, T.H., Kjeldsen, T.H. & Ottesen, J. (2001). Matematisk modellering ved den naturvidenskabelige basisuddannelse – udvikling af et kursus. Tekster fra IMFUFA, vol. 402. Lokaliseret 13/8-2012 på *http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/402.pdf*.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning, *i* Teaching Mathematics and its Applications, vol.22(3)

Blomhøj, M. (2004). Mathematical Modelling – A Theory for Practice, *i* Clarke, B., Clarke, D.M., Emanuelson, G., Johansson, B., Lambdin, D.V., Lester, F.K., Wallby, A., Wallby, K.: International perspectives on Learning and Teaching Mathematics, National Center for Mathematics Education, Göteborg Universitet, Sverige, 2004, s. 145-159.

Blomhøj. M. & Kjeldsen, T.H. (2005). Learning the integral concept through mathematical modelling, *i Proceedings* of the Fifth Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.2070-2079.

Blomhøj, M. & Kjeldsen, T.H. (2006). Teaching mathematical modelling through project work, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 38(2)

Blomhøj (2006). Mod en didaktisk teori for matematisk modellering. I Skovsmose, O. & Blomhøj, M. (red.): Kunne det tænkes? – om matematiklæring, kapitel 5, s. 80-109.

Blomhøj, M. & Jensen, T.H. (2006). What's all the fuss about competencies?, *i* Blum et.al 2007.

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modelling, Applications, and Links to Other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction, *I* Educational Studies in Mathematics, vol. 22, s. 37-68.

Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.W. & Niss, M. (red.) (2007). Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI-study, Springer.

Carpenter, T.P., Franke, M.L & Levi, L. (2003). Thinking Mathematically. Integrating Arithemetic and Algebra in Elementary School, Heinemann.

Carraher, D.W. (2008). Beyond 'blaming the victim' and 'standing in awe of noble savages': a response to "Revisiting Lave's cognition in practice", *i* Educational Studies in Mathematics, vol.69, s. 23-32.

Carstensen, J., Frandsen, J. og Studsgaard, J. (2007). MAT A1. Systime, 2. udgave.

Carstensen, J., Frandsen, J. og Studsgaard, J. (2010). MAT A2. Systime.

Christensen, K.C. (2008). Matematik og tværfaglighed i gymnasiet. Studenterrapport fra Roskilde Universitet. Lokaliseret 28/8-2012 på *http://hdl.handle.net/1800/3309*

Christiansen, H., Højlt, S., Jensen, O. & Thomsen, V. (1982). Om gymnasiets matematikundervisning, *i* LMFK, vol.4(4), april 1982, s. 8-11.

Christiansen, B. (1988). Konferencens tema i fagdidaktiske perspektiver, *i* Gymnasiets Matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav, Initiativet vedrørende Matematikundervisning, Statens Humanistiske Forskningsråd, konferencerapport udgivet af IMFUFA, Roskilde Universitetscenterm 1989, s. 33-92.

Christiansen, F.V. (2003). Problemtyper i problemorienteret undervisning – på og udenfor RUC. Upubliceret. Skrevet til RUC's 25 års jubilæumskonference. Lokaliseret den 21/8-2012 på *http://ku-dk.academia.edu/FrederikChristiansen/Papers/933024*.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005a): Gyldendals Gymnasiematematik. Grundbog B1. Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005b): Gyldendals Gymnasiematematik. Arbejdsbog B1. Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005c): Gyldendals Gymnasiematematik. Grundbog B2. Gyldendal.

Clausen, F., Schomacker, G. & Tolnø, J. (2005d): Gyldendals Gymnasiematematik. Arbejdsbog B2. Gyldendal.

Claussen, G. m.fl. (1983). Om den nye bekendtgørelse for matematik, *i* LMFK, vol.5(9), s. 6-7.

Cobb, P. (2007). Putting Philosophy to Work, *i* Lester (2007), s. 3-38.

Damerow, P. & Westbury, I. (1984): Conclusions Drawn from the Experience of the New Mathematics Movement, *i* Mathematcis for All, rapport til temagruppen "Mathematics for All" ved 5th International Congress on Mathematical Education, 1984, redigeret af P. Damerow, m.fl.

DI, Dansk Industri (2010). Fremtiden Kalder – Uddanner vi nok? Pjece. Lokaliseret 29/05-2012 på *http://di.dk/shop/publikationer/produktside/pages/produktside.aspx?productid=8653*

DMF – Dansk Matematisk Forening (1981). Rapport fra Landsmødet om Matematikken i Danmark 1981. Dansk Matematisk Forening, København.

Dolin, J. (2006). Fag, hovedområder og fagligt samspil, *i* Damberg, E., Dolin, J. & Ingerslev, G.H.: Gymnasiepædagogik – En grundbog, Hans Reitzels Forlag, 2006, 1. udgave, s. 195-208.

Dossey, J.A. (1992): The nature of Mathematics: Its role and its influence, *i* Grouw, D.A. (red.): Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, National Council of Teachers in Mathematics, 1992, MacMillan Publishing Company.

Eisenhart, M. (1991). Conceptual frameworks for research circa 1991: Ideas from a cultural anthropologist; Implications for mathematics education research. I: Underhill, R.G.: Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Eriksen, D. og Jensen, K.K. (2006). Matematik i samarbejde med andre fag i gymnasiet - eksemplificeret ved samarbejde med fysik. Professionsprojekt fra Roskile Universitet, IMFUFA. Lokaliseret 28/8-2012 på *http://hdl.handle.net/1800/1885*.

Ernest, P. (1985). The philosophy of mathematics and mathematics education, *i* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.16(5), s. 603-612.

Ernest, P. (1989). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics, *i* Ernest, P. (red.): Mathematics Teaching: The State of the Art, The Falmer Press, 1989.

Ernest, P. (1992). The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account, *i* Science & Education, vol.1, s. 89-100.

Ferri, R.B. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modeling process, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 38(2).

Frehr, H.F (1976). Toward a Unified Mathematics Curriculum for the Secondary School. Rapport fra National Science Foundation, Secondary School Mathematics Curriculum Improvement Study. Lokaliseret 10/7-2012 på *http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED129630.pdf*

Frejd, P. (2011). An investigation of mathematical modeling in the Swedish national course tests in mathematics, *i Proceedings* of the Seventh Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.947-956.

Frejd, P. & Ärlebäck, J.B. (2011). First Results from Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies, *i* Kaiser, G., Blum, W., Ferri, R. B. & Stillman, G.: Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling - ICTMA14, Springer, 2011.

Frejd, P. (2012). Teachers' conceptions of mathematical modeling at Swedish Upper Secondary School, *i* Journal of Mathematical Modelling and Application, vol.1(5), s.17-40.

Fried, M.N. (2001). Can Mathematics Education and History of Mathematics Coexist?, *i* Science & Education, vol. 10, s. 391-408.

Gallois, A. (2005/2011). Identity Over Time, *i* Zalta, E.N. (red.): Standford Encyclopedia of Philosophy, publiseret 18. marts 2005, med ændringer af 17. marts 2011. Lokaliseret 17/9-2012 på *http://plato.stanford.edu/entries/identity-time/*

Garfunkel, S. & Mumford, D. (2011). How to Fix Our Math Education, *i* New York Times, 24. august 2011.

Gjone, G. (1985). "Moderne matematikk" i skolen. Universitetsforlaget A/S.

Gregersen, P. & Jensen, T.H. (1998). Problemløsning og modellering i almendannende matematikundervisning. Specialerapport fra Roskilde Universitetscenter. Udgivet i Tekster fra IMFUFA, vol. 353. Lokaliseret 10/8-2012 på *http://milne.ruc.dk/ImfufaTekster/pdf/353.pdf*.

Hansen, V.L. (1988). Krav og forventninger til gymnasiets matematikundervisning, set fra DTH, *i* Gymnasiets Matematikundervisning mellem studie- og erhvervskrav og demokratikrav, Initiativet vedrørende Matematikundervisning, Statens Humanistiske Forskningsråd, konferencerapport udgivet af IMFUFA, Roskilde Universitetscenterm 1989, s. 21-27.

Hansen, N.S., Iversen, C., Troels-Smith, K. (1996). Modelkompetencer – udvikling og afprøvning af et begrebsapparat. Specialerapport fra Roskilde Universitet. Tekster fra IMFUFA, vol. 321.

Hansen,H.C. et.al. (2008). Matematikundervisningen i Danmark i 1900-tallet. Bind 1+2. Syddansk Universitetsforlag., Odense.

Hansen, V.L. (2008a). The dual nature of mathematics, *i* ICME-10 proceedings & regular lectures.

Hansen, B. (2009). Didaktik på tværs af matematik og historie – en prakseologisk undersøgelse af gymnasiale studieretningsprojekter. Specialerapport fra Københavns Universitet, IND's studenterserie, nr. 10. Lokaliseret 28/8-2012 på http://*www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie10/*

Hansen, F.M. (2009a). Samspil omkring differentialregningens elementer i gymnasiets matematik og fysik. Specialerapport fra Københavns Universitet, IND's studenterserie, nr. 13. Lokaliseret 28/8-2012 på *http://www.ind.ku.dk/publikationer/studenterserien/studenterserie12/*

Harel, G. & Sowder, L. (1998): Students' Proof Schemes: Results from Exploratory Studies. *i* CBMS Issues in Mathematics Education, vol.7: "Research in Collegiate Mathematics Education. III".

Hersh, R. (1997). What is Mathematics, Really? Jonathan Cape, London.

Holm, J. (2012). Status på anvendt matematik i det almen gymnasium, kommentar *i* MONA, vol. 2012(1), s.97-99.

Højgaard, T. (2009). Competencies, Skills and Assessment, *i* Hunter, R., Bicknell, B. & Burgess, T. (red.): Crossing divides: Proceedings of the 32nd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (Vol. 1). Palmerston North, NZ: MERGA

Højgaard, T., Sølberg, J., Bundsgaard, J. & Elmose, S. (2010). Kompetencemål i praksis – foranalyse bag projektet KOMPIS, *i* MONA 2010(3), s. 7-29.

Iversen, C. (1996). Reformer i gymnasiets matematikundervisning – 60'er matematikken i historisk belysning. Studenterrapport fra Roskilde Universitet, historie-studiet. Tilgængelig fra Roskilde Universitetsbibliotek som "OB 95/96:369".

Iversen, S. M. (2006). En didaktisk model for tværfaglige aktiviteter der involverer matematik. Specialerapport fra Syddansk Universitet. Upubliceret. Se evt. Michelsen & Iversen (2009).

Jakobsen, I.T. & Thybo, C. (2008). Gymnasiet i første halvdel af 1900-tallet, *i* Hansen et. al (2008), s. 499-555.

Jackson, A. (1997a). The Math Wars – California Battles It Out over Mathematics Education Reform (Part I), *i* Notices of the AMS, june/july 1997, s. 695-702.

Jackson, A. (1997b). The Math Wars – California Battles It Out over Mathematics Education Reform (Part II), *i* Notices of the AMS, august 1997, s. 695-702.

Jankvist, U.T. (2007). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – generelt set, *i* MONA 2007(3), s. 70-90.

Jankvist, U.T. (2008). Den matematikhistoriske dimension i undervisning – gymnasialt set, *i* MONA 2008(1), s. 24-45.

Jankvist, U.T. (2009). A categorization of the "whys" and "hows" of using history in mathematics education, *i* Educational Studies of Mathematics, vol. 71, s. 235-261.

Jankvist, U.T. (2010). An empirical study of using history as a 'goal', *i* Educational Studies of Mathematics, vol. 74(1), s. 53-74.

Jankvist, U.T. (2011). The construct of anchoring – an idea for 'measuring' interdisciplinarity in teaching, *i* Philosophy of Mathematics Education Journal, vol. 26. Lokaliseret 28/8-2012 på *http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/*

Jankvist, U. T., Nielsen, J. A. & Michelsen, C (2011). 'Modeling and interdisciplinarity' - a course for pre-service upper secondary teachers. *I* Seroglou, F., Koulountzos, V. & Siatras, A. (red.): Science & Culture: Promise, Challenge and Demand - proceedings from the 11th International IHPST and the 6th Greek History, Philosophy and Science Teaching Joint Conference, s. 371-376.

Jensen, J.H. (1991). Hvorfor tværfaglighed. I Jensen, H.J.: Mere spredt fægtning, Tekster fra IMFUFA nr. 404, 2001, s.3-8.

Jensen, T.H. (2007). Udvikling af matematisk modelleringskompetence som matematikundervisningens omdrejningpunkt – hvorfor ikke?, ph.d-afhandling fra Roskilde Universitet, IMFUFAtekst, vol. 458. Lokaliseret 29/6-2012 på *http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/458.pdf*

Jensen, K.B. (2008). Tværfaglige samspil med matematik i gymnasiet. Specialerapport fra Roskilde Universitet. Lokaliseret 28/8-2012 på *http://bjering.dk/MAT3.pdf*.

Jensen, T.H. (2009). Modellering versus problemløsning – om kompetencebeskrivelser som kommunikationsværktøj, *i* MONA 2009(2), s. 37-54.

Jensen, K.B. (2009a). Matematikkompetence skal tænkes ind i den eksisterende gymnasieskole, *i* MONA 2009(3), s. 84-89.

Jensen, K.B. (2010a). Tværfaglige samspil mellem matematik og historie i gymnasiets studieretningsprojekt (SRP), *i* MONA 2010(1), s. 32-53.

Jensen, K.B.S. (2010b). Matematik og tværfaglighed – et teoretisk blik, *i* LMFK-bladet, 2010(4), s.43-48.

Jensen, K.B.S. og Nielsen, K. H.M. (2011). En-dimensionel model af Spruce-Budworm-udbrud, *i* LMFK-bladet, januar 2011(1), s. 15-20.

Jensen, K.B.S. og Nielsen, K. H.M. (2011a). Tre-dimensionel model af Spruce-Budworm-udbrud, *i* LMFK-bladet, marts 2011(2), s. 17-26.

Jensen, K.B.S. (2012). Anvendelse og modellering i matematik – et teoretisk blik, *i* LMFK-bladet, marts 2012(2), s. 27-30.

Jensen, K.B.S. (2012a). Matematisk modellering: Hvor tidligt står Venus op?, *i* LMFK-bladet, august 2012(4), s. 12-17.

Johannesen, M. (2015). Studieretningsprojekter i Matematik og Historie. Specialeafhandling, Institut for Matematik, Aarhus Universitet.

Johansen, L.Ø. (2007). Sproglig bevidsthed som inkluderende faktor i matematikundervisningen, *i* MONA 2007(4), s. 7-24.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 38(3)

Kilpatrick, J. (1997a). Confronting Reform, *i* The American Mathematical Monthly, vol. 104(10) (Dec., 1997), s. 95-962.

Kilpatrick, J, (1997b). Five lessons from the New Math Era. Publiceret on-line. Lokaliseret 12/7-2012 på *http://www.nas.edu/sputnik/kilpatin.htm*. Offentliggjort i New York State Mathematics Teachers Journal, vol. 58, s.87-90.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (red.) (2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

Kilpatrick, J. (2012). The new math as an international phenomenon, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, Online, DOI: 10.1007/s11858-012-0393-2 (lokaliseret 11/7-2012).

Kjeldsen, T.H. & Blomhøj, M. (2009). Integrating history and philosophy in mathematics education at university level through problem-oriented project work.

Kjeldsen, T.H. & Blomhøj, M. (2012). Beyond motivation: history as a method for learning metadiscursive rules in mathematics, *i* Educational Studies in Mathematics, vol.80, s.327-349.

Kline, M. (1955). Pea Soup, Tripe, and Mathematics. Tale til Mathematical Association of America, 26. November 1955. Lokaliseret 11/7-2012 på http:*//www.rationalsys.com/mk_peasoup.html*

Kline, M. (1973). Why Johnny can't add. The failure of the new math, Vintage Books, New York.

Lesh, R. & Zawojewski, J. (2007). Problem Solving and Modeling *i* Lester (2007), kapitel 17.

Lester, F. (2005). On the theoretical, conceptual, and philosophical foundations for research in mathematics education, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol.37(6), s. 457-467.

Lester, F. (red.) (2007). Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. NCTM / Information Age Publishing.

Leung, F.K.S. (2001). In search of an East Asian Identity in Mathematics Education, i Educational Studies of Mathematics (ESM), vol. 47, s. 35-51

Lindhardt, L., Ejdrup, F., Skipper-Jørgensen, A. (2010). Ræsonnementer i folkeskolens matematikundervisning, *i* MONA 2010(4), s. 7-24.

Lingefjärd, T. (2005). Applied or pure mathematics, *i Proceedings* of the Fourth Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.1675-1685.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol.38(2)

Lingefjärd, T. (2011). Students constructing modelling tasks to peers, *i Proceedings* of the Seventh Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.982-989.

Lithner, J. (2000a). Mathematical reasoning in task solving, *i* Educational Studies of Mathematics, vol. 41, s. 165-190.

Lithner, J. (2000b). Mathematical reasoning and familiar procedures, *i* International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, vol.31(1), s.83-95.

Lithner, J. (2003). A Framework for Analysing Qualities of Mathematics Reasoning: Version 2. Matematikdidaktikk Rapport nr. 3. Lokaliseret 22/8-2012 på: *http://snovit.math.umu.se/forskning/Didaktik/Rapportserien/Rapport%202003,3%20JL.pdf*

Lithner, J. (2004). Mathematical reasoning in calculus textbook exercises, *i* Journal of Mathematical Behavior, vol.23, s.405-427.

Lovtidende (1903). Lov om højere Almenskoler m. m., *i* Lovtidende for 1903 Nr. 28, s.273-280. Kan 27/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/1903-LOV.pdf*

Lovtidende (1906). Anordning angaaende Undervisningen i Gymnasiet, *i* Lovtidende for 1906, side 760-765. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1906-ANORDNING.pdf*

Lovtidende (1906a). Bekendtgørelse angaaende Undervisningen i Gymnasiet, *i* Lovtidende for 1906, side 848-858. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1906-BEKENDTGØRELSE.pdf*

Lovtidende (1935). Kgl. Anordning angaaende Undervisningen i Gymnasiet, *i* Lovtidende for 1935, side 78f. Kan 27/4-2015 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1935-ANORDNING.pdf*

Lovtidende (1935a). Bekendtgørelse angaaende Undervisningen i Gymnasiet, *i* Lovtidende for 1935, side 123f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1935-BEKENDTGØRELSE.pdf*

Lovtidende (1935b). Undervisningsmin. Cirkulærskr. angaaende Normaltimeplan m. m. for Undervisningen i Gymnasiet, *i* Lovtidende for 1935, side 111f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1935-CIRKULÆRE.pdf*

Lovtidende (1935c). Kgl. anordning angaaende Fordringerne ved og Eksamensopgivelserne til Studentereksamen, *i* Lovtidende for 1935, side 642f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1935-EKSAMEN.pdf*

Lovtidende (1953). Kgl. anordning om undervisningen i gymnasiet, *i* Lovtidende for 1953, side 692f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1953-ANORDNING.pdf*

Lovtidende (1953a). Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet, *i* Lovtidende for 1953, side 401f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1953-BEKENDTGØRELSE.pdf*

Lovtidende (1953b). Anordning om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen, *i* Lovtidende for 1953, side 424f. Kan 27/4-2016 findes i uddrag på *http://bjering.dk/phd/1953-EKSAMEN.pdf*

Lovtidende (1961). Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet, *i* Lovtidende for 1953, side 716-727. Kan 27/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/1961-BEKENDTGØRELSE.pdf*

Mason, J. (2002). Qualitative Researching. 2nd edition. SAGE publications.

Mellin-Olsen, S. (1990). Opgavediskursen. I Nissen, G. & Bjørneboe, J.: Matematikundervisning og Demokrati, Initiativet vedrørende Matematikundervisning, Statens Humanistiske Forskningsråd, Rapport fra konference afholdt 14.-16. juni 1990, s. 47-64.

Mellin-Olsen, S. (1996). Oppgavediskursen i matematikk – Rekonstruksjon av en diskurs, *i* Tangenten 1996(2), s.11-17.

Michelsen, C. (2001). Begrebsdannelse ved domæneudvidelse. Elevers tilegnelse af funktionsbegrebet i et integreret undervisningsforløb mellem matematik og fysik. Ph.d-afhandling fra Syddansk Universitet.

Michelsen, C. (2005). Expanding the domain – variables and functions in an interdisciplinary context between mathematics and physics. I Beckmann, A., Michelsen, C. & Sriraman, B. (red.): Proceedings of the First International Symposium of Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences, s. 201-214.

Michelsen, C. (2006). Functions: A modeling tool in mathematics and science, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol.38(3), s. 269-280.

Michelsen, C. & Iversen, S.M. (2009). Samspillet mellem matematik og de andre fag i gymnasieskolen, *i* MONA 2009(2), s.21-36.

Michelsen, C. (2011). IBSME – inquiry-based science and mathematics education, *i* MONA, 2011(3), s. 72-77.

Munkholm, J. (1982). Om "autentiske anvendelser i matematik", *i* LMFK, vol.4(3), s.8-9.

Munkholm, E.S. (2008). Gymnasiet 1960 og frem, *i* Hansen et.al. (2008), s. 587-676.

Newell, W.H. (1992). Academic Disciplines and Undergraduate Interdisciplinary Education: Lessons from the School of Interdisciplinary Studies at Miami University, Ohio, *i* Europeanm Journal of Education, vol.27(3), s.211-221.

Nielsen, B.D. (1983). Om bekendtgørelsesændring i matematik, *i* LMFK, vol.5(9), s. 12-23.

Niss, M. (1989). Aims and Scope of Application and Modelling in Mathematics Curricula, *i* Blum, W., Berrym J.S., Biehler, R., Huntley, I.D., Kaiser-Mesmer, G. & Profke, L. (red.): Applications and Modelleing in Learning and Teaching Mathematics, Ellis Horwood Limited, 1989.

Niss, M. (1990). Faglighed og problemorientering, *i* KVAN, nr. 27., 10. årgang, s. 81-89.

Niss, M. (1992). Assessment of Mathematical Applications and Modelling in Mathematics Teaching, *i* Tekster fra IMFUFA, vol. 217, 1992.

Niss, M. (1994). Mathematics in society, *i* Biehler, R. et.al. (red.): Didactics of mathematics as a scientific discipline, 1994, Kluwer Academic Publishers, s.367-378.

Niss, M. (1996). Goals of Mathematics Teaching, *i* Bishop et. al. (1996), s. 11-47.

Niss, M. & Jensen, T.H. (2002). Kompetencer og matematiklæring. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie nr. 18, Undervisningsministeriet.

Niss, M. (2006). The concept and role of theory in mathematics education. Paper præsenteret på Nordic Conference on Mathematics Education (NORMA), september 2006. Lokaliseret 13/11-2012 på *http://mennta.hi.is/vefir/staerdfraedi/malstofa_A_04/Niss%20theory.pdf*

Niss, M. (2007). Reflections on the State and Trends in Research on Mathematics Teaching and Learning, *i* Lester (2007), kapitel 31 (s. 1293-1312)

Niss, M. (2007a). Opgavediskursen i matematikundervisningen, *i* MONA 2007(1), s.7-17.

Niss, M. (2010). Modeling a Crucial Aspect of Students' Mathematical Modeling. I Lesh, R., Galbraith, P.L., Haines, C.R. & Hurford, A.: Modelling Students' Mathematical Modeling Competencies, ICTMA 13, Springer, 2010.

Noonan, H. (2004/2009). Identity, *i* Zalta, E.N. (red.): Standford Encyclopedia of Philosophy, publiseret 15. december 2004, med ændringer af 7. November 2009. Lokaliseret 17/9-2012 på *http://plato.stanford.edu/entries/identity/*

ODS (1922). Fag. Opslag i Ordbog over det danske Sprog, bind 4. Lokaliseret 18/9-2012 på *http://ordnet.dk/ods/ordbog?select=Fag&query=fag*

Olson, E.T. (2002/2010). Personal Identity, *i* Zalta, E.N. (red.): Standford Encyclopedia of Philosophy, publiseret 20. august 2002, med ændringer af 28. oktober 2010. Lokaliseret 17/9-2012 på *http://plato.stanford.edu/entries/identity-personal/*

Palm, T. (2002). The realism of Mathematical School Tasks – Features and Consequences. Ph.d-afhandling, Department of Mathematics, Umeå University, Sverige.

Palm, T. & Burman, L. (2004). Reality in mathematics assessment – An analysis of task-reality concordance in Finnish and Swedish national assessments, *i* Nordic Studies in Mathematics Education (NOMAD), vol.9(3), s. 1-33.

Palm, T. (2008). Impact of authenticity on sense making in word problem solving, *i* Educational Studies of Mathematics, vol.67, s.37-58.

Palm, T. (2009). Theory of Authentic Task Situations, *i* Vershaffel, L. et al. (red.): Words and Worlds: Modelling Verbal Descriptions of Situations, Sense Publishers, 2009, s. 3-19.

Petersen, P.B. & Vagner, S. (2003). Studentereksamensopgaver i matematik 1806-1991. Matematiklærerforeningen. Til bogen medfølger en CD med historisk samling af opgavesæt.

Petersen, P.H. (2011). Potentielle landvindinger ved inddragelse af matematikhistorie i matematikundervisningen. Specialerapport fra Roskilde Universitet. IMFUFAtekst, vol. 483. Lokaliseret 27/8-2012 på *http://milne.ruc.dk/imfufatekster/pdf/483web.pdf*.

Pihl, M.D. (2012). Ikke en eneste uddannelse i Danmark er en dårlig forretning. Analyse fra Arbejderbevægelsens Erhvervsråd, offentliggjort 20/02-2012. Lokaliseret 29/05-2012 på *http://ae.dk/analyse/ikke-eneste-uddannelse-danmark-er-darlig-forretning*

Proulx, J. (2007). Addressing the issue if the mathematical knowledge of secondary mathematics teachers, *i* Proceedings of the 31^{st} Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol.4, s. 89-96.

Raymond, A.M. (1997). Inconsitency Between a Beginning Elementary School Teacher's Mathematics Beliefs and Teaching Practice, *i* Journal for Research in Mathematics Education, vol. 28(5), s. 550-576.

Schmidt, J.B. & Larsen, A. (2012). Regeringens bogorme-boom skaber bekymring. Journalistisk artikel i Ugebrevet A4, 16/05-2012. Lokaliseret samme dato på: *http://www.ugebrevet-a4.dk/2012/201220/Onsdag/kritik_af_regeringens_bogormestrategi.aspx*

Schoenfeld, A. (1985). Mathematical Problem Solving. Academic Press, London, UK.

Schoenfeld, A. (2004). The Math Wars, *i* Educational Policym, vol.18, s.253-286.

Schoenfeld, A. (2007). Problem solving in the United States, 1970-2008: research and theory, practice and politics, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol.39(5-6), s. 537-551.

Schultz, J. (1982). Om kurset "Tradition og Nytænkning i Matematikundervisningen", i LMFK, vol.4(1), januar 1982, s.36-41.

Semadeni, Z. (2008). The triple nature of mathematics: deep ideas, surface representations, formal models, *i* ICME-10 proceedings & regular lectures.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin, *I* Educational Studies of Mathematics, vol. 22(1), s. 1-36.

Shapiro, S. (1997). Philosophy of Mathematics: Structure and ontology. Oxford University Press.

Skemp, R.R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding, *i* Mathematics Teaching, vol. 77(dec. 1976), s. 20-26.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of Investigation, *i* ZDM – The International Journal on Mathematics Education, vol. 33(4), s. 123-132.

Somekh, B., Burman, E., Delamont, S., Meyer, J., Payne, M. & Thorpe, R. (2011a). Research in the Social Science, *i* Somekh, B. & Lewin, C. (red.) (2011): Theory and Methods in Social Research, 2. udgave, SAGE, kapitel 1, s. 2-15.

Stanic, G.M.A (1986). The Growing Crisis in Mathematics Education in the Early Twentieth Centutry, *i* Journal for Research in Mathematics Education, vol.17(3), s. 190-205.

Stanic, G.M.A. & Kilpatrick, J. (1992). Mathematics Curriculum Reform in the United States: A Historical Perspective, *i* International Journal of Educational Research, vol. 17(5), s. 407-417.

Styrelsen i Matematiklærerforeningen (1982). Matematiklærerforeningens rammeansøgning, *i* LMFK-bladet, vol.4(1), s.15-20.

Ulrichsen, L. (2001). Den sociologiske dimension. I Held, F. & Olsen, F.: Introduktion til pædagogik, Frydenlund, 2001, s.155-293.

UVM (1951). Studentereksamen maj-juni 1951. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1951a). Studentereksamen maj-juni 1951. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1952). Studentereksamen maj-juni 1952. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1952a). Studentereksamen maj-juni 1952. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1953). Studentereksamen maj-juni 1953. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1953a). Studentereksamen maj-juni 1953. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1960). Det nye gymnasium. Betænkning nr. 269. 27. februar 1959. Lokaliseret 28/4-2016 på *http://www.statensnet.dk/betaenkninger/0201-0400/0269-1960/0269-1960_pdf/searchable_269-1960.pdf*

UVM (1961). Bekendtgørelse om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen. Undervisningsministeriets bekendtgørelse nr. 293 af 6. september 1961. Kan 27/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/1961-EKSAMEN.pdf*

UVM (1969). Studentereksamen maj-juni 1969. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1969a). Studentereksamen maj-juni 1969. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1970). Studentereksamen maj-juni 1970. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1970a). Studentereksamen maj-juni 1970. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1971). Bekendtgørelse om undervisningen i gymnasiet og om fordringerne ved og eksamensopgivelserne til studentereksamen. Undervisningsministeriets bekendtgørelse af 16. juni 1971. Kan 27/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/1971-BEKENDTGØRELSE.pdf*

UVM (1971a). Studentereksamen maj-juni 1971. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1971b). Studentereksamen maj-juni 1971. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1980). Studentereksamen maj-juni 1980. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1980a). Studentereksamen maj-juni 1980. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1981). Studentereksamen maj-juni 1981. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1981a). Studentereksamen maj-juni 1981. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1982). Studentereksamen maj-juni 1982. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik I. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1982a). Studentereksamen maj-juni cↄ. Matematisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM (1999). Gymnasiebekendtgørelsen. Bilag 23. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Kan 28/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/1999-BEKENDTGØRELSE.pdf*

UVM (2000). Studentereksamen maj-juni 2000. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (2000a). Studentereksamen maj-juni 2000. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (2001). Studentereksamen maj-juni 2001. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (2001a). Studentereksamen maj-juni 2001. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (2002). Studentereksamen maj-juni 2002. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (2002a). Studentereksamen maj-juni 2002. Matematisk linje. 3-årigt forløb til A-niveau. Matematik. Prøven med hjælpemidler.

UVM (1981a). Studentereksamen maj-juni 1981. Matematmatisk linje. Matematisk-fysisk gren. Matematik II. *I* Petersen&Vagner (2003).

UVM – Undervisningsministeriet (2010). Bekendtgørelse om uddannelsen til studentereksamen stx-bekendtgørelsen). Juridisk dokument, 23. juni 2010. Lokaliseret 19/9-2012 på *https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132647*

UVM – Undervisningsministeriet (2010a). Bekendtgørelse om valgfag fælles for de gymnasiale uddannelser (valgfagsbekendtgørelsen). Juridisk dokument, 23. juni 2010. Lokaliseret 19/9-2012 på *https://www.retsinformation.dk/Forms/R0710.aspx?id=132670*

UVM - Undervisningsministeriet (2010b). Matematik A - Stx. Vejledning / Råd og vink. Gymnasieafdelingen. Kan 28/4-2016 findes på *http://bjering.dk/phd/2010-VEJLEDNING.pdf*

UVM (2011). Matematik A. Studentereksamen. Onsdag d. 18. maj 2011.

UVM (2011a). Matematik A. Studentereksamen. Tirsdag d. 24. maj 2011.

UVM (2012). Matematik A. Studentereksamen. Fredag d. 25. maj 2012.

UVM (2012a). Matematik A. Studentereksamen. Torsdag d. 31. maj 2012.

UVM (2013). Matematik A. Studentereksamen. Fredag d. 24. maj 2013.

UVM (2013a). Matematik A. Studentereksamen. Onsdag d. 29. maj 2013.

Vergnaud, G. (1997): The Nature of Mathematical Concepts. I Nunes, T. & Bryant, P.: Learning and Teaching of Mathematics, Psychology Press, 1997.

Videnkjær, C. (2012). Tværfaglige samspil mellem matematik og samfundsfag i det almene gymnasium. Specialerapport fra Roskilde Universitet. Forventes publiceret som IMFUFAtekst.

Vinner, S. (1991): The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. I Tall, D.: Advanced Mathematical Thinkning, Kluwer Academic Publishers, 1991.

Winsløw, C. (2006): Didaktiske elementer. Biofolia.

Wonsyld, F. & Holst, J.J. (1982). Referat af kurset ”Inddragelse af historiske emner i matematikundervisningen”, *i* LMFK, vol.4(9), novermber 1982, s.24-26.

Wu, H.H. (1994). The Rôle of Open-ended Problems in Mathematics Education, *i* Journal of Mathematical Behaviour, vol.13(1), s. 115-128.

Wu, H.H. (1996a). The Role of Euclidean Geometry in High School, vol.15(3), s. 221-237.

Wu, H.H. (1996b). The Mathematician and the Mathematics Education Reform”, *i* Notices of The AMS, december 1996, s. 1531-1537.

Ärlebäck, J.B. (2009a). Matematisk modellering i svenska gymnasieskolans kursplaner i matematik 1965-2000. Rapport nr 2009:8, LiTH-MAT-R-2009-8, Linkköping Universitet, Matematiska institutionen. Findes også i Ärlebäck, J.B.: Mathematical modelling in upper secondary mathematics education in Sweden. Ph.d.-afhandling fra Linköping Universitet, Department of Mathematics, Sverige (2009).

Ärlebäck, J.B. (2009b). On the use of Realistic Fermi problems for introducing mathematical modeling in school, *i* The Montana Mathematics Enthusiast, vol.6(3), s.331-364.

Ärlebäck, J.B. (2009c). Towards understanding teachers' beliefs and affects about mathematical modeling, *i Proceedings* of the Sixth Congress of the European Society for. Research in Mathematics Education, s.2096-2105.

11 Bilag

Da bilags-materialet til denne afhandling er *meget* stort, forefindes det kun elektronisk. I dette afsnit findes direkte links til enkelte bilag. En zip-fil med alt elektronisk materiale kan findes her:

http://bjering.dk/phd/Samlet.zip

Nummereringen af bilag følger det der står i afhandlingen, som måske ikke er helt logisk, men trods alt til at finde ud af.

Bilag 1: Spørgeskema

1a: Dokumentation af spørgeskema, herunder angivelse af navne på alle indgående variable:

http://bjering.dk/phd/Bilag-1a.pdf

1b: Udprint af hele spørgeskemaet. Da vejen gennem spørgeskemaet afhænger af de svar respondenten giver, henvises til bilag 1a for præcis dokumentation for disse veje

http://bjering.dk/phd/Bilag-1b.pdf

Bilag A: Analyser af fagidentitet på system-domæner:

A1: Analyse af pensumlisten i anordningen fra 1935: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A1.pdf*

A2: Analyse af pensumlisten i anordningen fra 1953: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A2.pdf*

A3: Analyse af eksamensopgaver fra 1951, 1952 og 1953: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A3.pdf*

A4: Analyse af pensumlisten i vejledningen fra 1961: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A4.pdf*

A5: Analyse af eksamensopgaver fra 1969, 1970 og 1971: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A5.pdf*

A6: Analyse af eksamensopgaver fra 1980, 1981 og 1982: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A6.pdf*

A7: Analyse af indholdsbeskrivelsen i bekendtgørelsen fra 1999: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A7.pdf*

A8: Analyse af eksamensopgaver fra 2000, 2001 og 2002: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A8.pdf*

A9: Analyse af eksamensopgaver fra 2011, 2012 og 2013: *http://bjering.dk/phd/Bilag-A9.pdf*

Bilag B: Analyser af fagidentiteer på lærebogsdomæner:

B1: Analyse af Andersen og Mogensen (1942): *http://bjering.dk/phd/Bilag-B1.pdf*

B2: Analyse af Kristensen og Rindung (1962): *http://bjering.dk/phd/Bilag-B2.pdf*

B3: Analyse af Carstensen, Frandsen og Studsgaard (2007): *http://bjering.dk/phd/Bilag-B3.pdf*

B4: Analyse af Clausen, Schomacker og Tolnø (2005): *http://bjering.dk/phd/Bilag-B4.pdf*